HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl,
T 040 2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of met *maximaal* één, eveneens voor dit vak ingeschreven partner.
- Schrijf je naam c.q. beide namen en studentnummer(s) op elk in te leveren vel.
- De uiterste inleverdatum is *woensdag 8 maart 2006.* Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken!
- Deze opdracht wordt beloond met een cijfer tussen 0 en 1. Dit is tevens de bonus die zal worden opgeteld bij je (her)tentamencijfer in 2006. (Het eindcijfer kan niet hoger zijn dan tien.)
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Herhaal zonodig eerst grondig je eerstejaars wiskundevakken!

1. In deze opgave mag je gebruik maken van de volgende standaardintegraal:

$$I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+i\mu x}\,dx = e^{-\frac{1}{2}\mu^2}\sqrt{2\pi} \quad \text{voor elke constante } \mu \in \mathbb{C}.$$

Verder hanteren we de volgende definitie van de zogenaamde *Hermite polynomen*:

$$H_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Enkele nuttige goniometrische identiteiten, geldig voor alle $\alpha, \beta, \phi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta\,, \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta\,, \\ e^{i\phi} &= \cos\phi + i\sin\phi\,. \end{aligned}$$

($\frac{3}{40}$) **a.** Geef de expliciete functievoorschriften van de Hermite polynomen H_0, H_1 en H_2.

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$.

($\frac{5}{40}$) **b.** Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2+i\mu x}\,dx = i^n\, H_n(\mu)\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2}\sqrt{2\pi}\,.$

(*Hint:* Pas in de definitie van $I(\mu)$ de operator $\left(i\frac{d}{d\mu}\right)^n$ toe.)

Gebruik makend van de hint levert enerzijds, door de volgorde van integreren en differentiëren om te wisselen,

$$\left(i\frac{d}{d\mu}\right)^n I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \left(i\frac{d}{d\mu}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+i\mu x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n\, x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2+i\mu x}\,dx\,.$$

Immers, elke keer dat we $\left(i\frac{d}{d\mu}\right)$ toepassen op de integrand levert een factor $-x$ op. Dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2+i\mu x}\,dx = (-1)^n \left(i\frac{d}{d\mu}\right)^n I(\mu)\,.$$

Anderzijds geldt

$$(-1)^n \left(i\frac{d}{d\mu}\right)^n I(\mu) \overset{*}{=} (-1)^n \left(i\frac{d}{d\mu}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\mu^2}\sqrt{2\pi} \overset{\star}{=} i^n H_n(\mu)\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2}\sqrt{2\pi}\,,$$

waarbij bij $*$ gebruik is gemaakt van de gegeven standaardintegraal en bij $\star$ van de definitie van het Hermite polynoom van graad n.

c. Bereken met behulp van voorgaande onderdelen de volgende integralen:

$(\frac{1}{40})$ **c1.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\,.$

Uit de definitie en het gegeven van $I(\mu)$ volgt rechtstreeks dat $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \overset{\text{def}}{=} I(0) = \sqrt{2\pi}$. Dit volgt ook uit de onderdelen a en b door $n=0$ en $\mu=0$ in te vullen.

$(\frac{1}{40})$ **c2.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ voor $n=0,1,2$.

Met behulp van onderdeel b volgt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2+ix} = \mathrm{Re}\left(i^n H_n(1)\, e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\right)$. Dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \begin{cases} \sqrt{2\pi/e} & \text{als } n=0 \text{ (want } \mathrm{Re}\, i^0=1 \text{ en } H_0(1)=1) \\ 0 & \text{als } n=1 \text{ (want } \mathrm{Re}\, i^1=0) \\ 0 & \text{als } n=2 \text{ (want } H_2(1)=0) \end{cases}$$

(Het geval $n=1$ volgt ook uit antisymmetrie van de integrand.)

$(\frac{1}{40})$ **c3.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n \sin x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ voor $n=0,1,2$.

Met behulp van onderdeel b volgt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n \sin x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2+ix} = \mathrm{Im}\left(i^n H_n(1)\, e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\right)$. Dus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \sin x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{als } n=0 \text{ (want } \mathrm{Im}\, i^0=0) \\ \sqrt{2\pi/e} & \text{als } n=1 \text{ (want } \mathrm{Im}\, i=1 \text{ en } H_1(1)=1) \\ 0 & \text{als } n=2 \text{ (want } \mathrm{Im}\, i^2=0 \text{ of } H_2(1)=0) \end{cases}$$

(De gevallen $n=0$ en $n=2$ volgen ook uit antisymmetrie van de integrand.)

$(\frac{1}{40})$ **c4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\,.$

Uit de goniometrische identiteiten volgt dat $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$. Dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\,.$$

De eerste integraal in het rechterlid volgt direct uit c1. Voor de tweede gaan we als volgt te werk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\, e^{-\frac{1}{2}x^2+2ix}\,dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+2ix}\,dx \overset{*}{=} \mathrm{Re}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{e^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^2}\,.$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van de gegeven standaardintegraal. Al met al volgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{e^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

$\left(\frac{1}{40}\right)$ **c5.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\,.$

De berekening verloopt analoog aan c4, maar nu maken we gebruik van de goniometrische identiteit $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Hiermee reduceert de integraal tot

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{e^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

$\left(\frac{1}{40}\right)$ **c6.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\,.$

De integrand is oneven, terwijl het integratiedomein symmetrisch is t.o.v. $x=0$, dus $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = 0$.

$\left(\frac{4}{40}\right)$ **d.** Voorts zijn gegeven de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i=1,2,3$, met functievoorschriften

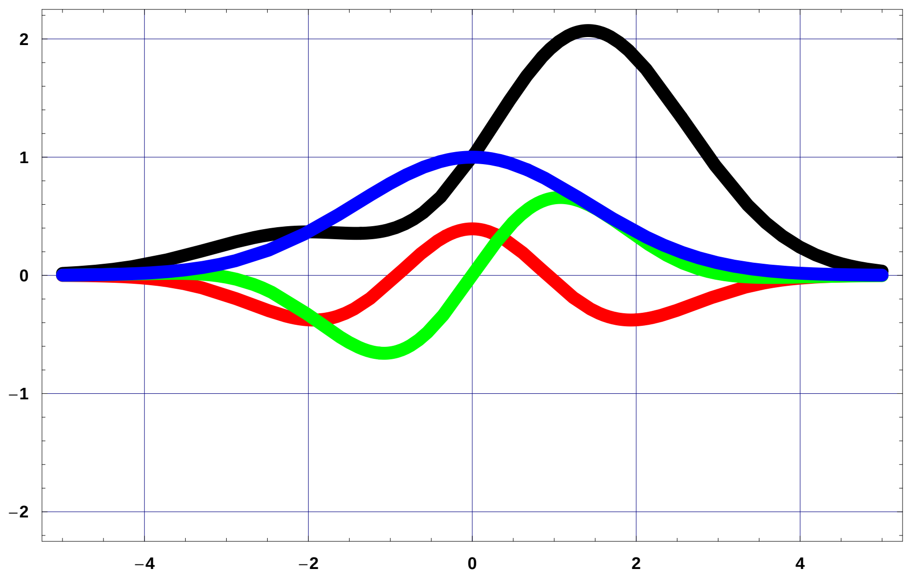
$$f(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right),$$

respectievelijk

$$g_1(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \quad g_2(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\sin x\,, \quad g_3(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\,.$$

Schets de grafieken van f, g_1, g_2 en g_3 in één figuur.

Zie Figuur: f **(zwart)**, g_1 **(rood)**, g_2 **(groen)**, g_3 **(blauw)**.



$(\frac{6}{40})$ **e.** Bereken (op kladpapier[1]) de inprodukten $\langle g_i|g_j\rangle$ voor alle $i, j = 1, 2, 3$. Hierbij gaan we uit van het standaard inprodukt voor functies:

$$\langle f|g\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx\,.$$

Vat je resultaat samen in een matrix van de vorm

$$\mathbf{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \langle g_1|g_1\rangle & \langle g_1|g_2\rangle & \langle g_1|g_3\rangle \\ \langle g_2|g_1\rangle & \langle g_2|g_2\rangle & \langle g_2|g_3\rangle \\ \langle g_3|g_1\rangle & \langle g_3|g_2\rangle & \langle g_3|g_3\rangle \end{bmatrix}.$$

Alle noodzakelijke integraties zijn uitgevoerd in onderdeel c:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e-1}{e}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2\pi} \end{bmatrix}.$$

$(\frac{5}{40})$ **f.** Laat zien dat als V een lineaire ruimte met reëel inprodukt is, met orthogonale basis $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$, een willekeurig element $v \in V$ geschreven kan worden als

$$v = c_1 e_1 + \ldots + c_k e_k\,,$$

waarin de coëfficiënten $c_i \in \mathbb{R}$ gegeven worden door

$$c_i = \frac{\langle v|e_i\rangle}{\langle e_i|e_i\rangle} \quad i = 1, \ldots, k.$$

(*Hint:* Neem in de eerste vergelijking links en rechts het inprodukt met e_i.)

Omdat $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ een basis is kan elke $v \in V$ geschreven worden als lineaire combinatie $v = c_1e_1 + \ldots + c_ke_k$ voor zekere $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. De coëfficiënten volgen uit de hint: $\langle v|e_i\rangle = \langle c_1e_1 + \ldots + c_ke_k|e_i\rangle \stackrel{*}{=} c_1\langle e_1|e_i\rangle + \ldots + c_k\langle e_k|e_i\rangle \stackrel{\star}{=} c_i\langle e_i|e_i\rangle$. Bij $*$ is gebruik gemaakt van lineariteit van het inprodukt met betrekking tot zijn eerste argument, bij $\star$ is gebruik gemaakt van orthogonaliteit van $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$. Omdat $\langle e_i|e_i\rangle \neq 0$ volgt hieruit onmiddellijk het resultaat.

g. Laat zien dat $P_{\mathscr{B}}v \stackrel{\text{def}}{=} c_1e_1 + \ldots + c_\ell e_\ell$ een orthogonale projectie is voor elke $\ell = 1, \ldots, k$, door te laten zien dat

$(\frac{3}{40})$ **g1.** $P^2_{\mathscr{B}}v = P_{\mathscr{B}}v$ voor alle $v \in V$.

Kies $v \in V$ willekeurig. Dan geldt

$$P^2_{\mathscr{B}}v \stackrel{*}{=} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\langle P_{\mathscr{B}}v|e_j\rangle}{\langle e_j|e_j\rangle} e_j \stackrel{*}{=} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\langle \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\langle v|e_i\rangle}{\langle e_i|e_i\rangle} e_i|e_j\rangle}{\langle e_j|e_j\rangle} e_j \stackrel{\star}{=} \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\langle v|e_i\rangle}{\langle e_i|e_i\rangle} \frac{\langle e_i|e_j\rangle}{\langle e_j|e_j\rangle} e_j \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\langle v|e_i\rangle}{\langle e_i|e_i\rangle} \delta_{ij} e_j = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\langle v|e_i\rangle}{\langle e_i|e_i\rangle} e_i \stackrel{*}{=} P_{\mathscr{B}}v\,.$$

Bij $*$ is de definitie van $P_{\mathscr{B}}$ gebruikt. Bij $\star$ is lineariteit van het inprodukt met betrekking tot zijn eerste argument gebruikt. Bij $\circ$ is orthogonaliteit van de basis $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ gebruikt: $\langle e_i|e_j\rangle = \langle e_i|e_i\rangle\, \delta_{ij}$. Hierbij is de definitie van het Kronecker symbool gebruikt: $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$, anders 0.

$(\frac{3}{40})$ **g2.** $\langle w|P_{\mathscr{B}}v\rangle = \langle P_{\mathscr{B}}w|v\rangle$ voor alle $v, w \in V$.

Schrijf $v, w \in V$ als $v = \sum_{i=1}^{k} v_i e_i$, resp. $w = \sum_{i=1}^{k} w_i e_i$, zodat $P_{\mathscr{B}}v = \sum_{i=1}^{\ell} v_i e_i$, resp. $P_{\mathscr{B}}w = \sum_{i=1}^{\ell} w_i e_i$, met $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq k$.

$$\langle w|P_{\mathscr{B}}v\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \textstyle\sum_{i=1}^{k} w_i e_i | \sum_{j=1}^{\ell} v_j e_j\rangle \stackrel{\circ}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} w_i v_j \langle e_i|e_j\rangle \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{k} w_i v_j \langle e_i|e_j\rangle \stackrel{\circ}{=} \langle \textstyle\sum_{i=1}^{\ell} w_i e_i | \sum_{j=1}^{k} v_j e_j\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle P_{\mathscr{B}}w|v\rangle \,.$$

Bij $\circ$ is gebruik gemaakt van bilineariteit van het inprodukt. Bij $*$ zou je gebruik kunnen maken van het feit dat termen met indices $i > \ell$ en $j \leq \ell$ of met $j > \ell$ en $i \leq \ell$ niet bijdragen aan de som, aangezien hiervoor geldt dat $\langle e_i|e_j\rangle = 0$. Eenvoudiger is het op te merken dat de uitdrukking $\langle e_i|e_j\rangle$ symmetrisch is, zodat je i en j mag verwisselen in de voorfactoren: $w_i v_j \leftrightarrow w_j v_i$ (waarna je de sommatiedummies mag herlabelen: $i \leftrightarrow j$).

$(\frac{5}{40})$ **h.** Bepaal de projectie $P_{\mathscr{G}}f \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3$ van f op het opspansel van $\mathscr{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$.

Het is eenvoudiger om de basisfuncties van de projectieruimte eerst te normeren, als volgt:

$$\widehat{g}_i = \frac{g_i}{\sqrt{\langle g_i|g_i\rangle}} \qquad \text{voor } i = 1, 2, 3.$$

In dat geval hebben we namelijk $P_{\mathscr{G}}f \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = a_1\widehat{g}_1 + a_2\widehat{g}_2 + a_3\widehat{g}_3$, met $\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle f|g_i\rangle}{\langle g_i|g_i\rangle}$ en $a_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle f|\widehat{g}_i\rangle$. Berekening van de nog ontbrekende inprodukten levert het volgende:

$$\begin{aligned}
\langle f|g_1\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) dx \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cos x \, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - \frac{1}{2\sqrt{e}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx - \frac{1}{\sqrt{e}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \stackrel{\star}{=} -\sqrt{\frac{\pi}{2e}}\,, \\
\langle f|g_2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right)\sin x \, dx \stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin x \, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \stackrel{\star}{=} \sqrt{\frac{2\pi}{e}}\,, \\
\langle f|g_3\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) dx \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx \stackrel{\star}{=} \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}\,.
\end{aligned}$$

Bij $*$ zijn, gebruik makend van lineariteit, integralen uitgeschreven, waarbij termen met antisymmetrische integranden achterwege zijn gelaten. Bij $\star$ zijn de numerieke resultaten uit onderdeel c gebruikt. Al met al vinden we, gebruik makend van de numerieke resultaten uit onderdeel e:

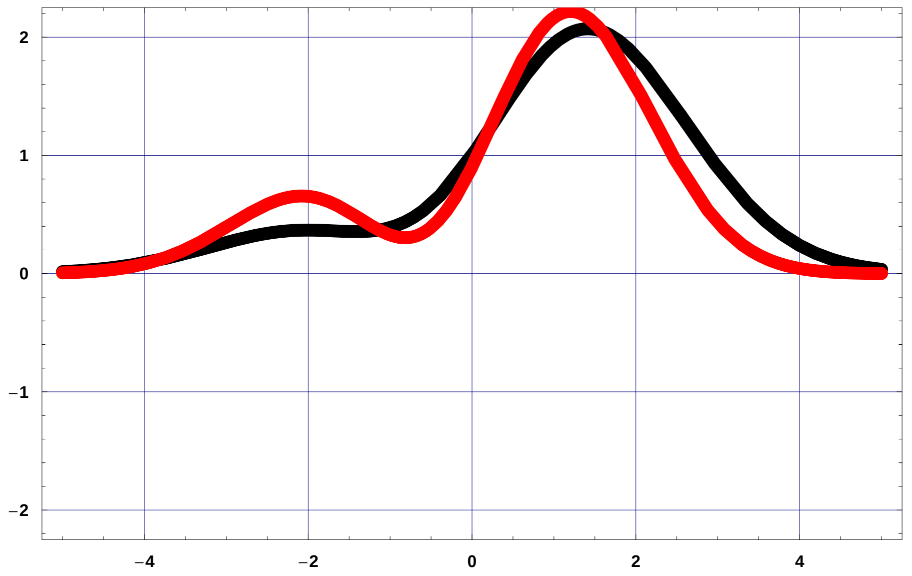
$$P_{\mathscr{G}}f = -\frac{e\sqrt{e}}{(e-1)^2}\, g_1 + \frac{2e\sqrt{e}}{e^2-1}\, g_2 + \frac{3}{2}\, g_3\,.$$

Oftewel, na enkele vereenvoudigingen,

$$P_{\mathscr{G}}f(x) = \frac{1}{e-1}\left(\frac{3e^2 - 4e + 3}{2(e-1)} - \frac{e\sqrt{e}}{(e-1)}\cos x + 2e\sqrt{e}\sin x\right) e^{-\frac{1}{4}x^2} \approx (2.42067 - 1.51793\cos x + 5.21648\sin x)\, e^{-\frac{1}{4}x^2}\,.$$

Zie Figuur: f **(zwart)**, $P_{\mathscr{G}}f$ **(rood)**.

[1] De berekeningen zelf worden niet beoordeeld en hoef je dan ook niet in te leveren.



EINDE