HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl,
T 040 2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of met *maximaal* één, eveneens voor dit vak ingeschreven partner.
- Schrijf je naam c.q. beide namen en studentnummer(s) op elk in te leveren vel.
- De uiterste inleverdatum is *woensdag 8 maart 2006*. Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken!
- Deze opdracht wordt beloond met een cijfer tussen 0 en 1. Dit is tevens de bonus die zal worden opgeteld bij je (her)tentamencijfer in 2006. (Het eindcijfer kan niet hoger zijn dan tien.)
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Herhaal zonodig eerst grondig je eerstejaars wiskundevakken!

1. In deze opgave mag je gebruik maken van de volgende standaardintegraal:

$$I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2+i\mu x}\,dx = e^{-\frac{1}{2}\mu^2}\sqrt{2\pi} \quad \text{voor elke constante } \mu \in \mathbb{C}.$$

Verder hanteren we de volgende definitie van de zogenaamde *Hermite polynomen*:

$$H_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{voor elke } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Enkele nuttige goniometrische identiteiten, geldig voor alle $\alpha, \beta, \phi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta\,,\\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta\,,\\
e^{i\phi} &= \cos\phi + i\sin\phi\,.
\end{aligned}$$

($\frac{3}{40}$) **a.** Geef de expliciete functievoorschriften van de Hermite polynomen H_0, H_1 en H_2.

($\frac{5}{40}$) **b.** Laat zien dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt $\int_{-\infty}^{\infty} x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2+i\mu x}\,dx = i^n\, H_n(\mu)\, e^{-\frac{1}{2}\mu^2}\sqrt{2\pi}\,.$

(*Hint:* Pas in de definitie van $I(\mu)$ de operator $\left(i\frac{d}{d\mu}\right)^n$ toe.)

c. Bereken met behulp van voorgaande onderdelen de volgende integralen:

($\frac{1}{40}$) **c1.** $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx\,.$

($\frac{1}{40}$) **c2.** $\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\cos x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \quad$ voor $n = 0, 1, 2$.

($\frac{1}{40}$) **c3.** $\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\sin x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \quad$ voor $n = 0, 1, 2$.

$(\frac{1}{40})$ **c4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\,.$

$(\frac{1}{40})$ **c5.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\,.$

$(\frac{1}{40})$ **c6.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, \cos x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx\,.$

$(\frac{4}{40})$ **d.** Voorts zijn gegeven de functies $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ en $g_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=1,2,3$, met functievoorschriften

$$f(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right),$$

respectievelijk

$$g_1(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \quad g_2(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\sin x\,, \quad g_3(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}\,.$$

Schets de grafieken van f, g_1, g_2 en g_3 in één figuur.

$(\frac{6}{40})$ **e.** Bereken (op kladpapier[1]) de inprodukten $\langle g_i|g_j\rangle$ voor alle $i,j=1,2,3$. Hierbij gaan we uit van het standaard inprodukt voor functies:

$$\langle f|g\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Vat je resultaat samen in een matrix van de vorm

$$\mathbf{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \langle g_1|g_1\rangle & \langle g_1|g_2\rangle & \langle g_1|g_3\rangle \\ \langle g_2|g_1\rangle & \langle g_2|g_2\rangle & \langle g_2|g_3\rangle \\ \langle g_3|g_1\rangle & \langle g_3|g_2\rangle & \langle g_3|g_3\rangle \end{bmatrix}.$$

$(\frac{5}{40})$ **f.** Laat zien dat als V een lineaire ruimte met reëel inprodukt is, met orthogonale basis $\mathscr{B} = \{e_1,\ldots,e_k\}$, een willekeurig element $v\in V$ geschreven kan worden als

$$v = c_1e_1 + \ldots + c_ke_k\,,$$

waarin de coëfficiënten $c_i\in\mathbb{R}$ gegeven worden door

$$c_i = \frac{\langle v|e_i\rangle}{\langle e_i|e_i\rangle} \quad i=1,\ldots,k.$$

(*Hint:* Neem in de eerste vergelijking links en rechts het inprodukt met e_i.)

g. Laat zien dat $P_{\mathscr{B}}v \stackrel{\text{def}}{=} c_1e_1 + \ldots + c_\ell e_\ell$ een orthogonale projectie is voor elke $\ell = 1,\ldots,k$, door te laten zien dat

$(\frac{3}{40})$ **g1.** $P_{\mathscr{B}}^2 v = P_{\mathscr{B}}v$ voor alle $v\in V$.

$(\frac{3}{40})$ **g2.** $\langle w|P_{\mathscr{B}}v\rangle = \langle P_{\mathscr{B}}w|v\rangle$ voor alle $v,w\in V$.

$(\frac{5}{40})$ **h.** Bepaal de projectie $P_{\mathscr{G}}f \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1g_1 + \alpha_2g_2 + \alpha_3g_3$ van f op het opspansel van $\mathscr{G} = \{g_1,g_2,g_3\}$.

EINDE

[1] De berekeningen zelf worden niet beoordeeld en hoef je dan ook niet in te leveren.