HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl, **T** 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of in zelf te vormen *groepjes van maximaal vier studenten.* De omvang van de groep is van invloed op de strengheid van beoordeling.
- Schrijf ieders naam en studentnummer op elk ingeleverde vel.
- De uiterste inleverdatum is *dinsdag 10 februari 2004* (voorafgaand aan of na afloop van het hoorcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken.
- Correct ingeleverde uitwerkingen worden beloond met een cijfer tussen 0.0 en 1.0. Dit levert een deelcijfer dat deel zal uitmaken van je tentamencijfer van 26 mei 2004 of je hertentamencijfer van 8 juli 2004. Het resultaat van deze opgave zal je eindcijfer niet negatief beïnvloeden.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe.

Opgave. Definieer de verzameling $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, waarin $f_1, \ldots, f_6$ reëelwaardige functies op $\mathbb{R}^2$ zijn, gegeven door respectievelijk

$$f_1(x,y) = 1\ ,\ f_2(x,y) = x\ ,\ f_3(x,y) = y\ ,\ f_4(x,y) = \frac{1}{2}x^2\ ,\ f_5(x,y) = xy\ ,\ f_6(x,y) = \frac{1}{2}y^2\ .$$

We definiëren de lineaire ruimte $V = \operatorname{span}\mathcal{F}$, d.i. het opspansel van $\mathcal{F}$, met de gebruikelijke definities van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging.

(0.20) **a.** Leg uit wat hier bedoeld wordt met “de gebruikelijke definities van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging” door het functievoorschrift te geven van de functie $\lambda f + \mu g$ voor gegeven $f, g \in V$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Definitie: $(\lambda f + \mu g)(x,y) = \lambda f(x,y) + \mu g(x,y)$. Merk op dat als f, g tweedegraads veeltermfuncties zijn, ditzelfde geldt voor $\lambda f + \mu g$.

(0.20) **b.** Laat zien dat $\mathcal{F}$ een basis is van V.

Ten eerste: $V = \operatorname{span}\mathcal{F}$ per definitie. Ten tweede: Stel $\lambda_1, \ldots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_6 f_6 = 0$. Dan geldt voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 f_1(x,y) + \ldots + \lambda_6 f_6(x,y) = 0$, d.i. $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \frac{1}{2}\lambda_4 x^2 + \lambda_5 xy + \frac{1}{2}\lambda_6 y^2 = 0$. Door zes geschikt gekozen combinaties voor het paar (x,y) in te vullen vind je zes onafhankelijke lineaire homogene vergelijkingen in $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$, waaruit volgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_6 = 0$. Alternatief: Door de zes partiële afgeleiden $\partial^{k+l}/\partial x^k \partial y^l$ te nemen van de functie $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_6 f_6$ in het punt $(x,y) = (0,0)$ tot en met tweede orde—dus achtereenvolgens $(k,l) = (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2)$—vind je direct $\lambda_1 = \ldots = \lambda_6 = 0$. Uit deze twee constateringen volgt dat $\mathcal{F}$ een basis is van V.

Beschouw de afbeelding $A : V \to V : f \mapsto Af$, gegeven als volgt:

$$Af(x,y) = y\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,.$$

(0.20) **c.** Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

Zij $f, g \in V$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan geldt $A(\lambda f + \mu g)(x,y) = y \frac{\partial \lambda f + \mu g}{\partial x}(x,y) = \lambda y \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \mu y \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \lambda (Af)(x,y) + \mu (Ag)(x,y)$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ergo $A(\lambda f + \mu g) = \lambda Af + \mu Ag$.

Definieer de verzameling $A\mathcal{F} = \{Af_1, Af_2, Af_3, Af_4, Af_5, Af_6\}$ van de zes beeldfuncties Af_i, $i = 1, \ldots, 6$, en beschouw de lineaire ruimte $W = \operatorname{span} A\mathcal{F}$.

(0.20) **d.** Is $A\mathcal{F}$ een basis van W? Onderbouw je antwoord met een bewijs. Indien $A\mathcal{F}$ géén basis vormt, geef dan aan welke deelverzameling van $A\mathcal{F}$ wèl geschikt is als basis. Noem deze deelverzameling $\mathcal{G}$ en haar elementen $g_1, \ldots, g_n$ (met $0 \leq n \leq 6$ het aantal basisfuncties in $\mathcal{G}$).

Voor de functies $Af_1, \ldots, Af_6$ hebben we achtereenvolgens de functievoorschriften $Af_1(x,y) = 0$, $Af_2(x,y) = y$, $Af_3(x,y) = 0$, $Af_4(x,y) = xy$, $Af_5(x,y) = y^2$ en $Af_6(x,y) = 0$. Dus i.h.b. is $Af_1 = Af_3 = Af_6 = 0$. Een basis bevat nooit de nulvector, dus $A\mathcal{F}$ is geen basis van W. Als je deze nulvectoren achterwege laat krijg je de set $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$, met $g_1(x,y) = y$, $g_2(x,y) = xy$ en $g_3(x,y) = y^2$, welke wèl een basis vormt van $W = \operatorname{span} A\mathcal{F} = \operatorname{span} \mathcal{G}$. De dimensie van W is dus $n=3$.

(0.20) **e.** Bepaal de matrix $\mathbf{A}$ behorende bij de lineaire afbeelding A ten opzichte van de bases $\mathcal{F}$ en $\mathcal{G}$. D.w.z., als $f \in V$ (dus $f = v_1 f_1 + \ldots + v_6 f_6$ voor één of ander 6-tupel $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_6) \in \mathbb{R}^6$) en $g \in W$ (dus $g = w_1 g_1 + \ldots + w_n g_n$ voor één of ander n-tupel $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$), bepaal dan de matrix $\mathbf{A}$ die het verband weergeeft tussen de coëfficiëntenrijtjes $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ in de zin dat

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\,\mathbf{v}\,.$$

Hierin moet je $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ als kolomvectoren opvatten. Het rechterlid bevat de gebruikelijke matrix-vector vermenigvuldiging.
(*Hint:* De matrix wordt volledig bepaald door de beelden Af_i van de basisfuncties f_i, $i = 1, \ldots, 6$.)

Stel $g = w_1 g_1 + w_2 g_2 + w_3 g_3$ en $f = v_1 f_1 + \ldots + v_6 f_6$, met $g = Af$. Uit onderdeel c volgt dat $Af = v_1 Af_1 + \ldots v_6 Af_6$ en uit onderdeel d volgt dat $Af_1 = Af_3 = Af_6 = 0$. Conclusie: $w_1 g_1 + w_2 g_2 + w_3 g_3 = v_2 Af_2 + v_4 Af_4 + v_5 Af_5$, oftewel $w_1 y + w_2 xy + w_3 y^2 = v_2 y + v_4 xy + v_5 y^2$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} w_1 &= v_2 \\ w_2 &= v_4 \\ w_3 &= v_5\,, \end{aligned}$$

oftewel, in matrix notatie:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

en daarin herkennen we de 3×6-matrix $\mathbf{A}$. Merk op dat de kolommen van $\mathbf{A}$ overeenkomen met de kolomvectoren behorende bij de beelden Af_i van de basisvectoren $f_i \in V$ t.o.v. de basis $\{g_1, g_2, g_3\}$ van W.

EINDE