

HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl,
T 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóóordat je begint!

- Maak deze opgave alleen of in zelf te vormen *groepjes van maximaal vier studenten*. De omvang van de groep is van invloed op de strengheid van beoordeling.
- Schrijf ieders naam en studentnummer op elk ingeleverde vel.
- De uiterste inleverdatum is *dinsdag 10 februari 2004* (voorafgaand aan of na afloop van het hoorcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken.
- Correct ingeleverde uitwerkingen worden beloond met een cijfer tussen 0.0 en 1.0. Dit levert een deeltcijfer dat deel zal uitmaken van je tentamencijfer van 26 mei 2004 of je hertentamencijfer van 8 juli 2004. Het resultaat van deze opgave zal je eindcijfer niet negatief beïnvloeden.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe.

Opgave. Definieer de verzameling $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$, waarin f_1, \dots, f_6 reëelwaardige functies op \mathbb{R}^2 zijn, gegeven door respectievelijk

$$f_1(x, y) = 1, f_2(x, y) = x, f_3(x, y) = y, f_4(x, y) = \frac{1}{2}x^2, f_5(x, y) = xy, f_6(x, y) = \frac{1}{2}y^2.$$

We definiëren de lineaire ruimte $V = \text{span } \mathcal{F}$, d.i. het opspansel van \mathcal{F} , met de gebruikelijke definities van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging.

(0.20) **a.** Leg uit wat hier bedoeld wordt met “de gebruikelijke definities van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging” door het functievoorschrift te geven van de functie $\lambda f + \mu g$ voor gegeven $f, g \in V$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(0.20) **b.** Laat zien dat \mathcal{F} een basis is van V .

Beschouw de afbeelding $A : V \rightarrow V : f \mapsto Af$, gegeven als volgt:

$$Af(x, y) = y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

(0.20) **c.** Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

Definieer de verzameling $A\mathcal{F} = \{Af_1, Af_2, Af_3, Af_4, Af_5, Af_6\}$ van de zes beeldfuncties Af_i , $i = 1, \dots, 6$, en beschouw de lineaire ruimte $W = \text{span } A\mathcal{F}$.

(0.20) **d.** Is $A\mathcal{F}$ een basis van W ? Onderbouw je antwoord met een bewijs. Indien $A\mathcal{F}$ géén basis vormt, geef dan aan welke deelverzameling van $A\mathcal{F}$ wèl geschikt is als basis. Noem deze deelverzameling \mathcal{G} en haar elementen g_1, \dots, g_n (met $0 \leq n \leq 6$ het aantal basisfuncties in \mathcal{G}).

(0.20) e. Bepaal de matrix \mathbf{A} behorende bij de lineaire afbeelding A ten opzichte van de bases \mathcal{F} en \mathcal{G} . D.w.z., als $f \in V$ (dus $f = v_1 f_1 + \dots + v_6 f_6$ voor één of ander 6-tupel $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_6) \in \mathbb{R}^6$) en $g \in W$ (dus $g = w_1 g_1 + \dots + w_n g_n$ voor één of ander n -tupel $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$), bepaal dan de matrix \mathbf{A} die het verband weergeeft tussen de coëfficiëntenrijtjes \mathbf{v} en \mathbf{w} in de zin dat

$$\mathbf{w} = \mathbf{A} \mathbf{v}.$$

Hierin moet je \mathbf{v} en \mathbf{w} als kolomvectoren opvatten. Het rechterlid bevat de gebruikelijke matrix-vector vermenigvuldiging.

(*Hint*: De matrix wordt volledig bepaald door de beelden Af_i van de basisfuncties f_i , $i = 1, \dots, 6$.)

EINDE