HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl,
T 040 2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of met *maximaal* één, eveneens voor dit vak ingeschreven partner.
- Schrijf je naam c.q. beide namen en studentnummer(s) op elk in te leveren vel.
- De uiterste inleverdatum is *woensdag 11 januari 2006* (voorafgaand aan het werkcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken!
- Deze opdracht wordt beloond met een cijfer tussen 0 en 1. Dit is tevens de bonus die zal worden opgeteld bij je (her)tentamencijfer in 2006. (Het eindcijfer kan niet hoger zijn dan tien.)
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Herhaal zonodig eerst grondig je eerstejaars wiskundevakken!

Opgave 1. We beschouwen een inverteerbare histogramtransformatie

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : s \mapsto T(s) \quad \text{met } T \in C^{\omega}(\mathbb{R}) \text{ en } T' > 0.$$

Verder kijken we naar de klasse van tweedimensionale beelden die we kunnen modelleren als analytische functies van het type $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto u(x, y)$ met $u \in C^{\omega}(\mathbb{R}^2)$. We noemen een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ een *kritiek punt* van de functie u indien voor de eerste orde partiële afgeleiden in dat punt geldt $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$.

$(\frac{1}{10})$ **a.** Bewijs dat de kritieke punten van het getransformeerde beeld $v = T(u)$ samenvallen met die van het originele beeld u.

Als (x, y) een kritiek punt is van u en als $v = T(u)$, dan volgt $v_x(x, y) = T'(u(x, y))\, u_x(x, y) = 0$ evenals $v_y(x, y) = T'(u(x, y))\, u_y(x, y) = 0$. Hierin is gebruik gemaakt van de *kettingregel*. Andersom, als (x, y) een kritiek punt is van v, dus als $v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0$, dan volgt uit diezelfde formule dat $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$, aangezien $T'(s) \neq 0$ voor alle $s \in \mathbb{R}$. Hierin is dus expliciet gebruik gemaakt van de monotonie-eigenschap van de gegeven histogramtransformatie.

Kritieke punten kunnen gekarakteriseerd worden als *minima*, *maxima* of *zadelpunten*, al naar gelang het gedrag van het beeld in een directe omgeving van zo'n punt. De signatuur van de eigenwaarden van de *Hessiaan* in een kritiek punt, dat is de matrix van tweede orde partiële afgeleiden,

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} u_{xx}(x, y) & u_{xy}(x, y) \\ u_{xy}(x, y) & u_{yy}(x, y) \end{pmatrix},$$

is bepalend voor deze karakterisering:

- Minimum: $\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 > 0$.
- Maximum: $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_2 < 0$.
- Zadelpunt: $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

We sluiten gevallen waarbij $\lambda_1 = 0$ of $\lambda_2 = 0$ uit, m.a.w. we kijken uitsluitend naar zogenaamde "reguliere" kritieke punten. Merk op dat $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en dat de bijbehorende eigenvectoren $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ onderling loodrecht zijn, een direct gevolg van de symmetrie van de Hessiaan.

$(\frac{1}{10})$ **b.** Laat zien dat bovenstaande karakterisering correct is aan de hand van een Taylorontwikkeling van het beeld rond een kritiek punt. Zonder verlies van algemeenheid mag je ervan uit gaan dat het kritieke punt zich in de oorsprong bevindt.
(*Hint:* Het staat je vrij om een coördinatenstelsel voor deze Taylorontwikkeling te kiezen; maak hier slim gebruik van!)

In een voldoende kleine omgeving van $(0,0)$ geldt in een willekeurig Cartesisch coördinatenstelsel

$$u(x,y) = u(0,0) + u_x(0,0)\,x + u_y(0,0)\,y + \frac{1}{2}u_{xx}(0,0)\,x^2 + u_{xy}(0,0)\,xy + \frac{1}{2}u_{yy}(0,0)\,y^2 + \text{h.o.t.}$$

(De afkorting staat voor "hogere orde termen".) De oorsprong is een kritiek punt, zodat bovenstaande reduceert tot

$$u(x,y) = u(0,0) + \frac{1}{2}u_{xx}(0,0)\,x^2 + u_{xy}(0,0)\,xy + \frac{1}{2}u_{yy}(0,0)\,y^2 + \text{h.o.t.}$$

De nulde-orde term $u(0,0)$ zegt niets over de aard van het kritieke punt, alleen over zijn waarde, en mogen we dus verder negeren. De Hessiaan is een symmetrische matrix en kan derhalve door geschikt gekozen rotatie van basisvectoren, d.w.z. geschikte keuze van x- en y-as, op diagonaalgedaante gebracht worden. We mogen dus zonder verlies van algemeenheid stellen dat $u_{xy}(0,0) = 0$. Daarmee vereenvoudigt onze Taylorontwikkeling tot

$$u(x,y) = u(0,0) + \frac{1}{2}u_{xx}(0,0)\,x^2 + \frac{1}{2}u_{yy}(0,0)\,y^2 + \text{h.o.t.}$$

De eigenwaarden λ_1 en λ_2 van een diagonaalmatrix zijn precies de diagonaalelementen, dus mogen we stellen dat $\lambda_1 = u_{xx}(0,0)$ en $\lambda_2 = u_{yy}(0,0)$. Bepalend voor de aard van het kritieke punt $(0,0)$ is dus de kwadratische vorm

$$q(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\lambda_1\,x^2 + \frac{1}{2}\lambda_2\,y^2\,.$$

De grafiek van deze functie is een *dalparaboloïde* als $\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 > 0$, een *bergparaboloïde* als $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_2 < 0$ en een *zadelvlak* als $\lambda_1\lambda_2 < 0$. De oorsprong is in deze gevallen dus respectievelijk een minimum, een maximum, en een zadelpunt.

$(\frac{1}{10})$ **c.** Bewijs dat de minima, maxima en zadelpunten van het getransformeerde beeld $v = T(u)$ samenvallen met kritieke punten van hetzelfde type in het originele beeld u.
(*Hint:* Je kunt de voorwaarden aan de signatuur van de eigenwaarden vertalen naar voorwaarden aan die van $\operatorname{tr}\mathbf{H}$, respectievelijk $\det\mathbf{H}$, d.w.z. het *spoor*, respectievelijk de *determinant* van de Hessiaan.)

In ons handig gekozen coördinatenstelsel hebben we $\lambda_1 = u_{xx}(0,0)$ en $\lambda_2 = u_{yy}(0,0)$. Voor $v = T(u)$ geldt, wederom gebruik makend van de *kettingregel* en tevens van de *produktregel*, $v_{xy}(x,y) = T''(u(x,y))u_x(x,y)u_y(x,y) + T'(u(x,y))u_{xy}(x,y)$. In het kritieke punt (de oorsprong) geldt dus in het bijzonder $v_{xy}(0,0) = 0$. Hieruit volgt dat de Hessian van $v = T(u)$ in een kritiek punt diagonaal is d.e.s.d.a. de Hessiaan van u daar diagonaal is. De eigenwaarden van de Hessiaan van $v = T(u)$, zeg μ_1, μ_2, zijn dus respectievelijk $\mu_1 = v_{xx}(0,0) = T''(u(0,0))u_x(0,0)^2 + T'(u(0,0))u_{xx}(0,0) = T'(u(0,0))\lambda_1$ en $\mu_2 = v_{yy}(0,0) = T''(u(0,0))u_y(0,0)^2 + T'(u(0,0))u_{yy}(0,0) = T'(u(0,0))\lambda_2$. Omdat $T'(s) > 0$ voor alle $s \in \mathbb{R}$ hebben μ_1 en μ_2 dus dezelfde signatuur als λ_1 en λ_2. De aard van de kritieke punten blijft dus behouden na histogramtransformatie.

Als alternatief kun je kijken naar wat er met $\operatorname{tr}\mathbf{H}$ en $\det\mathbf{H}$ gebeurt. Roep in herinnering dat $\operatorname{tr}\mathbf{H} = \lambda_1 + \lambda_2$ en $\det\mathbf{H} = \lambda_1\lambda_2$. Geven we met een subscript u of v aan op welke functie de Hessiaan betrekking heeft, dan geldt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\mathbf{H}_v &= v_{xx} + v_{yy} = \\ &\quad T''(u)\left(u_x^2 + u_y^2\right) + T'(u)\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = T'(u)\operatorname{tr}\mathbf{H}_u\,,\end{aligned}$$

respectievelijk

$$\begin{aligned}\det\mathbf{H}_v &= v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2 = \\ &\quad \left(T''(u)u_x^2 + T'(u)u_{xx}\right)\left(T''(u)u_y^2 + T'(u)u_{yy}\right) - \left(T''(u)u_xu_y + T'(u)u_{xy}\right)^2 = T'(u)^2\,\det\mathbf{H}_u\,.\end{aligned}$$

(Hierin wordt je geacht alle partiële afgeleiden van u te evalueren in de oorsprong.) Aangezien $T'(s)>0$ voor alle $s \in \mathbb{R}$ volgt hieruit dat de tekens van het spoor en de determinant van de Hessiaan niet veranderen onder de transformatie. Datzelfde geldt dan dus ook voor de eigenwaarden.

We nemen nu als expliciet voorbeeld de transformatie met functievoorschrift $T_\lambda(s) = \arctan(\lambda s)$. Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}^+$ een positieve constante.

$(\frac{1}{10})$ **d.** Laat zien dat T_λ voor elke $\lambda \in \mathbb{R}^+$ toelaatbaar is in de zin dat $T'_\lambda > 0$.

$T'_\lambda(s) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2 s^2} > 0$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en $s \in \mathbb{R}$.

$(\frac{1}{10})$ **e.** Geef het functievoorschrift van de inverse histogramtransformatie, $T_\lambda^{\text{inv}}(s)$. Geef duidelijk aan wat het domein is van T_λ^{inv}.

Het bereik van T_λ is het open interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Dit is dus tevens het domein van T_λ^{inv}. Het functievoorschrift wordt gegeven door

$$T_\lambda^{\text{inv}} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} : t \mapsto T_\lambda^{\text{inv}}(t) = \frac{1}{\lambda} \tan t\,.$$

Immers $T_\lambda^{\text{inv}}(t = T_\lambda(s)) = \frac{1}{\lambda}\tan(\arctan(\lambda s)) = s$ voor alle $s \in \mathbb{R}$ en $T_\lambda(s = T_\lambda^{\text{inv}}(t)) = \arctan(\tan t) = t$ voor alle $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, dus $T_\lambda^{\text{inv}} \circ T_\lambda = \text{id}_{\mathbb{R}}$ en $T_\lambda \circ T_\lambda^{\text{inv}} = \text{id}_{(-\pi/2,\pi/2)}$. Hierin staat id_Ω voor de identiteitsfunctie op domein Ω.

$(\frac{1}{10})$ **f.** Vormt de set van histogramtransformaties $\mathbf{T} = \{T_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ een groep? Bewijs je stelling.

Nee: Samenstelling is geen gesloten operatie op deze set, d.w.z. als $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ willekeurig, dan i.h.a. $T_\lambda \circ T_\mu \notin \mathbf{T}$. Dit is eenvoudig in te zien door het functievoorschrift uit te schrijven: Er bestaat geen $\nu \in \mathbb{R}^+$ zodanig dat voor alle $s \in \mathbb{R}$ geldt

$$(T_\lambda \circ T_\mu)(s) = \arctan(\lambda \arctan(\mu s)) = \arctan(\nu s)\,.$$

Om dit in te zien zou je bijvoorbeeld kunnen kijken naar het limietgedrag waarbij $s \to \infty$: Het linkerlid convergeert dan naar $\arctan(\lambda\,\pi/2) < \pi/2$, terwijl het rechterlid convergeert naar $\pi/2$.

Opgave 2. We beschouwen de verzameling $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ van alle gladde, reëelwaardige functies. We voorzien deze verzameling van een vectorruimtestructuur door middel van functie-optelling en scalairvermenigvuldiging op de gebruikelijke manier.

$(\frac{1}{10})$ **a.** Geef middels formules aan wat met dit laatste bedoeld wordt.

Een vectorruimtestructuur vereist een goede definitie van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging. In dit geval definiëren we voor willekeurige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$: $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Let op: In het linkerlid staan de scalairvermenigvuldiging en vectoroptelling die we willen invoeren, in het rechterlid wordt gebruik gemaakt van de bekende regels voor vermenigvuldiging en optelling van reële getallen. Het is essentieel om aan te geven dat dit *voor alle* x in het domein van de betreffende functies geldt, want daarmee leg je de functie $\lambda f + \mu g$ vast.

Zonder bewijs nemen we verder aan dat $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, voorzien van genoemde structuur, inderdaad een vectorruimte is. We bekijken vervolgens de volgende deelverzamelingen, $A, S \subset L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \right\}, \\ S &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

$(\frac{1}{10})$ **b.** Bewijs dat zowel A als S, voorzien van soortgelijke definities voor functie-optelling en scalairvermenigvuldiging, zelf ook vectorruimten zijn.

We hebben $A, S \subset L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, waarbij gegeven is dat de superset $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ een vectorruimte is. Aan alle criteria voor vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging is dus a fortiori voldaan, *mits* vectoroptelling of scalairvermenigvuldiging toegepast op elementen van A of S ons niet uit deze respectievelijke verzamelingen voert. Stel $f, g \in A$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan geldt

$$(\lambda f + \mu g)(x) \stackrel{*}{=} \lambda f(x) + \mu g(x) \stackrel{\text{A}}{=} -\lambda f(-x) - \mu g(-x) \stackrel{*}{=} -(\lambda f + \mu g)(-x)\,.$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van de definitie van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging zoals die bij onderdeel a is ingevoerd. Het label A duidt erop dat gebruik is gemaakt van de antisymmetrie-eigenschap van de elementen van A. Conclusie: $\lambda f + \mu g \in A$. Voor $f, g \in S$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig hebben we geheel analoog:

$$(\lambda f + \mu g)(x) \stackrel{*}{=} \lambda f(x) + \mu g(x) \stackrel{\text{S}}{=} \lambda f(-x) + \mu g(-x) \stackrel{*}{=} (\lambda f + \mu g)(-x)\,.$$

Stap S maakt gebruik van de symmetrie-eigenschap van de elementen van S. Conclusie: $\lambda f + \mu g \in S$. Zowel A als S zijn dus lineaire deelruimten van $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, en dus zelf ook vectorruimten.

Voorts voorzien we $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ van de volgende, reëelwaardige vorm:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(-x)\, dx, \quad \text{voor elke } f, g \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}).$$

Hetzelfde doen we met de deelverzamelingen A en S.

$(\frac{1}{10})$ **c.** Bewijs dat deze vorm een reëel inprodukt definieert op $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ of geef een tegenvoorbeeld indien dit niet het geval is.

Op $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ definieert deze vorm *geen* inprodukt. Kies bijvoorbeeld $f \in A \subset L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ (nulfunctie), dan geldt

$$\langle f|f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, f(-x)\, dx \stackrel{\text{A}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\, dx < 0\,.$$

Dit is in strijd met de positiviteitsvereiste van een inprodukt.

$(\frac{1}{10})$ **d.** Als onderdeel c, maar nu met $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ vervangen door de deelverzamelingen A, respectievelijk S.

Op de deelruimte $A \subset L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ definieert deze vorm *geen* inprodukt. Het bewijs is feitelijk geleverd in onderdeel c. Op $S \subset L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ definieert deze vorm *wel* een inprodukt. Voor S geldt immers dat de bilineaire vorm equivalent is met het standaard inprodukt:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(-x)\, dx \stackrel{\text{S}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \quad \text{voor elke } f, g \in S.$$

Hiervoor geldt ($f, g, h \in S$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, integratiedomein impliciet als boven):

- $\langle \lambda f + \mu g|h\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int (\lambda f + \mu g)(x)\, h(x)\, dx \stackrel{*}{=} \int (\lambda f(x) + \mu g(x))\, h(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, h(x)\, dx + \mu \int g(x)\, h(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\langle f|h\rangle + \mu\langle g|h\rangle$.
- $\langle f|\lambda g + \mu h\rangle \stackrel{\star}{=} \langle \lambda g + \mu h|f\rangle \stackrel{\dagger}{=} \lambda\langle g|f\rangle + \mu\langle h|f\rangle \stackrel{\star}{=} \lambda\langle f|g\rangle + \mu\langle f|h\rangle$. Bij stap $\star$ is gebruik gemaakt van commutativiteit, wat hieronder bewezen wordt, bij stap $\dagger$ is gebruik gemaakt van reeds bewezen lineariteit met betrekking tot het eerste argument, zie hierboven.
- $\langle f|g\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int f(x)\, g(x)\, dx = \int g(x)\, f(x)\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \langle g|f\rangle$.
- $\langle f|f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int f(x)^2\, dx \geq 0$. Gelijkheid impliceert, vanwege continuïteit, dat de integrand overal nul moet zijn (anders is hij strict positief op een deel van het domein), m.a.w. $f = 0$ (nulfunctie).

EINDE