HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl, **T** 040 2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of met *maximaal* één, eveneens voor dit vak ingeschreven partner.
- Schrijf je naam c.q. beide namen en studentnummer(s) op elk in te leveren vel.
- De uiterste inleverdatum is *woensdag 11 januari 2006* (voorafgaand aan het werkcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken!
- Deze opdracht wordt beloond met een cijfer tussen 0 en 1. Dit is tevens de bonus die zal worden opgeteld bij je (her)tentamencijfer in 2006. (Het eindcijfer kan niet hoger zijn dan tien.)
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Herhaal zonodig eerst grondig je eerstejaars wiskundevakken!

Opgave 1. We beschouwen een inverteerbare histogramtransformatie

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : s \mapsto T(s) \quad \text{met } T \in C^{\omega}(\mathbb{R}) \text{ en } T' > 0.$$

Verder kijken we naar de klasse van tweedimensionale beelden die we kunnen modelleren als analytische functies van het type $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto u(x, y)$ met $u \in C^{\omega}(\mathbb{R}^2)$. We noemen een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ een *kritiek punt* van de functie u indien voor de eerste orde partiële afgeleiden in dat punt geldt $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$.

($\frac{1}{10}$) **a.** Bewijs dat de kritieke punten van het getransformeerde beeld $v = T(u)$ samenvallen met die van het originele beeld u.

Kritieke punten kunnen gekarakteriseerd worden als *minima*, *maxima* of *zadelpunten*, al naar gelang het gedrag van het beeld in een directe omgeving van zo'n punt. De signatuur van de eigenwaarden van de *Hessiaan* in een kritiek punt, dat is de matrix van tweede orde partiële afgeleiden,

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} u_{xx}(x, y) & u_{xy}(x, y) \\ u_{xy}(x, y) & u_{yy}(x, y) \end{pmatrix},$$

is bepalend voor deze karakterisering:

- Minimum: $\lambda_1 > 0$ en $\lambda_2 > 0$.
- Maximum: $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_2 < 0$.
- Zadelpunt: $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.

We sluiten gevallen waarbij $\lambda_1 = 0$ of $\lambda_2 = 0$ uit, m.a.w. we kijken uitsluitend naar zogenaamde "reguliere" kritieke punten. Merk op dat $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en dat de bijbehorende eigenvectoren $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_2$ onderling loodrecht zijn, een direct gevolg van de symmetrie van de Hessiaan.

($\frac{1}{10}$) **b.** Laat zien dat bovenstaande karakterisering correct is aan de hand van een Taylorontwikkel-

ing van het beeld rond een kritiek punt. Zonder verlies van algemeenheid mag je ervan uit gaan dat het kritieke punt zich in de oorsprong bevindt.
(*Hint:* Het staat je vrij om een coördinatenstelsel voor deze Taylorontwikkeling te kiezen; maak hier slim gebruik van!)

($\frac{1}{10}$) **c.** Bewijs dat de minima, maxima en zadelpunten van het getransformeerde beeld $v = T(u)$ samenvallen met kritieke punten van hetzelfde type in het originele beeld u.
(*Hint:* Je kunt de voorwaarden aan de signatuur van de eigenwaarden vertalen naar voorwaarden aan die van $\operatorname{tr}\mathbf{H}$, respectievelijk $\det\mathbf{H}$, d.w.z. het *spoor*, respectievelijk de *determinant* van de Hessiaan.)

We nemen nu als expliciet voorbeeld de transformatie met functievoorschrift $T_\lambda(s) = \arctan(\lambda s)$. Hierin is $\lambda \in \mathbb{R}^+$ een positieve constante.

($\frac{1}{10}$) **d.** Laat zien dat T_λ voor elke $\lambda \in \mathbb{R}^+$ toelaatbaar is in de zin dat $T'_\lambda > 0$.

($\frac{1}{10}$) **e.** Geef het functievoorschrift van de inverse histogramtransformatie, $T_\lambda^{\text{inv}}(s)$. Geef duidelijk aan wat het domein is van T_λ^{inv}.

($\frac{1}{10}$) **f.** Vormt de set van histogramtransformaties $\mathbf{T} = \{T_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ een groep? Bewijs je stelling.

Opgave 2. We beschouwen de verzameling $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ van alle gladde, reëelwaardige functies. We voorzien deze verzameling van een vectorruimtestructuur door middel van functie-optelling en scalairvermenigvuldiging op de gebruikelijke manier.

($\frac{1}{10}$) **a.** Geef middels formules aan wat met dit laatste bedoeld wordt.

Zonder bewijs nemen we verder aan dat $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$, voorzien van genoemde structuur, inderdaad een vectorruimte is. We bekijken vervolgens de volgende deelverzamelingen, $A, S \subset L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = -f(-x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \right\}, \\ S &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

($\frac{1}{10}$) **b.** Bewijs dat zowel A als S, voorzien van soortgelijke definities voor functie-optelling en scalairvermenigvuldiging, zelf ook vectorruimten zijn.

Voorts voorzien we $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ van de volgende, reëelwaardige vorm:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(-x)\, dx, \quad \text{voor elke } f, g \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}).$$

Hetzelfde doen we met de deelverzamelingen A en S.

($\frac{1}{10}$) **c.** Bewijs dat deze vorm een reëel inprodukt definieert op $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ of geef een tegenvoorbeeld indien dit niet het geval is.

($\frac{1}{10}$) **d.** Als onderdeel c, maar nu met $L^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ vervangen door de deelverzamelingen A, respectievelijk S.

EINDE