HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Deadline: vrijdag 11 april 2008.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opdracht alleen of samen met maximaal één voor dit vak ingeschreven medestudent(e).
- Schrijf na(a)m(en) en studentnummer(s) op elk ingeleverde vel.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.
- Over de details van de opdracht worden voor de inleverdatum geen *specifieke* vragen beantwoord. (Vragen van *algemene* aard zijn uiteraard ten allen tijde welkom!)
- Lever deze huiswerkopdracht in vóór het verstrijken van de aangegeven deadline bij de docent of een van de assistenten. Huiswerkopdrachten die later binnenkomen worden niet nagekeken.
- Deze opdracht levert maximaal één bonuspunt op, welk zal worden opgeteld bij het (her)tentamencijfer voor het vak 8D020 (alleen geldig in het academisch jaar 2007–2008).

VEEL SUCCES!

(10) Opgave.

In deze opgave vergelijken we volgende drie lineaire afbeeldingen:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
A_{\mathbb{R}^2} & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & : & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & A_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
A_{\mathbb{C}} & : & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} & : & \begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} & \mapsto & A_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos i\phi & -\sin i\phi \\ \sin i\phi & \cos i\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix}, \\
A_{\mathbb{D}} & : & \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} & : & \begin{pmatrix} x \\ \epsilon y \end{pmatrix} & \mapsto & A_{\mathbb{D}}\begin{pmatrix} x \\ \epsilon y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\epsilon\phi & -\sin\epsilon\phi \\ \sin\epsilon\phi & \cos\epsilon\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \epsilon y \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Hierin zijn $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de welbekende verzamelingen van *reële getallen*, respectievelijk *complexe getallen*, met de gangbare algebraïsche rekenregels voor optellen en vermenigvuldigen. De verzameling $\mathbb{D}$ bevat de zogenaamde *duale getallen.* Een duaal getal $z \in \mathbb{D}$ kan geschreven worden als $z = x + \epsilon\, y$, met $x, y \in \mathbb{R}$ en zuiver "imaginaire" constante $\epsilon \neq 0$, met de definiërende eigenschap $\epsilon^2 = 0$ (analoog aan de schrijfwijze $z = x + i\, y$ met $i^2 = -1$ voor $z \in \mathbb{C}$). Om de analogieën te benadrukken kiezen we in bovenstaande definities in alle gevallen voor een kolomrepresentatie, d.w.z. we identificeren

$$
x + i\, y \equiv \begin{pmatrix} x \\ i\, y \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \qquad \text{respectievelijk} \qquad x + \epsilon\, y \equiv \begin{pmatrix} x \\ \epsilon\, y \end{pmatrix} \in \mathbb{D}\,.
$$

We kunnen op de voor de hand liggende manier $\mathbb{R}$ opvatten als deelverzameling van zowel $\mathbb{C}$ als $\mathbb{D}$, en zowel $\mathbb{C}$ als $\mathbb{D}$ identificeren met het vlak $\mathbb{R}^2$. De rekenregels voor vermenigvuldigen en optellen op $\mathbb{D}$ zijn geheel analoog aan die van $\mathbb{C}$, afgezien van de nilpotente eigenschap $\epsilon^2 = 0$.

De goniometrische functies op $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ zijn gedefinieerd bij de gratie van hun convergente Taylorreeksen:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}\,, \tag{1}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n+1}\,. \tag{2}$$

Dit geldt ook voor de exponentiële functie:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n\,. \tag{3}$$

($2\frac{1}{2}$) **a.** Bewijs dat voor $\phi \in \mathbb{R}$ geldt:

$$e^{i\,\phi} = \cos\phi + i\,\sin\phi\,, \tag{4}$$

$$\cos i\,\phi = \cosh\phi\,, \tag{5}$$

$$\sin i\,\phi = i\,\sinh\phi\,. \tag{6}$$

Bewijs (4): Gebruik makend van vergelijking (3) voor $z = i\phi$ krijgen we, gebruik makend van $i^2 = -1$,

$$e^{i\,\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(i\,\phi)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\,(i\,\phi)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}\,(i\,\phi)^{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\phi^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\phi^{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\phi + i\,\sin\phi\,.$$

Bewijs (5): Per definitie geldt $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, dus

$$\cosh\phi = \frac{1}{2}\left(e^{\phi} + e^{-\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\phi^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(-\phi)^n\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(\phi^n + (-\phi)^n) \stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(i\phi)^{2n} \stackrel{\text{def}}{=} \cos i\,\phi\,.$$

Bij $*$ is gebruikt dat de termen voor oneven n in de sommatie wegvallen, terwijl de termen voor even n gelijk zijn. Merk op dat $\phi^{2n} = (-1)^n\,(i\,\phi)^{2n}$.

Bewijs (6): Per definitie geldt $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, dus

$$i\,\sinh\phi = \frac{i}{2}\left(e^{\phi} - e^{-\phi}\right) = \frac{i}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\phi^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(-\phi)^n\right) = \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(\phi^n - (-\phi)^n) \stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(i\phi)^{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sinh i\,\phi\,.$$

Bij $*$ is gebruikt dat de termen voor even n in de sommatie wegvallen, terwijl de termen voor oneven n gelijk zijn. Merk op dat $i\,\phi^{2n+1} = (-1)^n\,(i\,\phi)^{2n+1}$.

($2\frac{1}{2}$) **b.** Bewijs dat voor $\phi \in \mathbb{R}$ geldt:

$$e^{\epsilon\,\phi} = 1 + \epsilon\,\phi\,, \tag{7}$$

$$\cos\epsilon\,\phi = 1\,, \tag{8}$$

$$\sin\epsilon\,\phi = \epsilon\,\phi\,. \tag{9}$$

Bewijs (7):

$$e^{\epsilon\,\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(\epsilon\,\phi)^n = 1 + \epsilon\,\phi + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(\epsilon\,\phi)^n = 1 + \epsilon\,\phi + \epsilon^2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\,(\epsilon\,\phi)^{n-2}\,\phi^2 \stackrel{*}{=} 1 + \epsilon\,\phi\,.$$

Bij $*$ is de nilpotentie eigenschap $\epsilon^2 = 0$ gebruikt (dat geldt ook voor de overige bewijsvoeringen hieronder). Bewijs (8):

$$\cos\epsilon\,\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(\epsilon\,\phi)^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(\epsilon\,\phi)^{2n} = 1 + \epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(\epsilon\,\phi)^{2(n-1)}\,\phi^2 \overset{*}{=} 1\,.$$

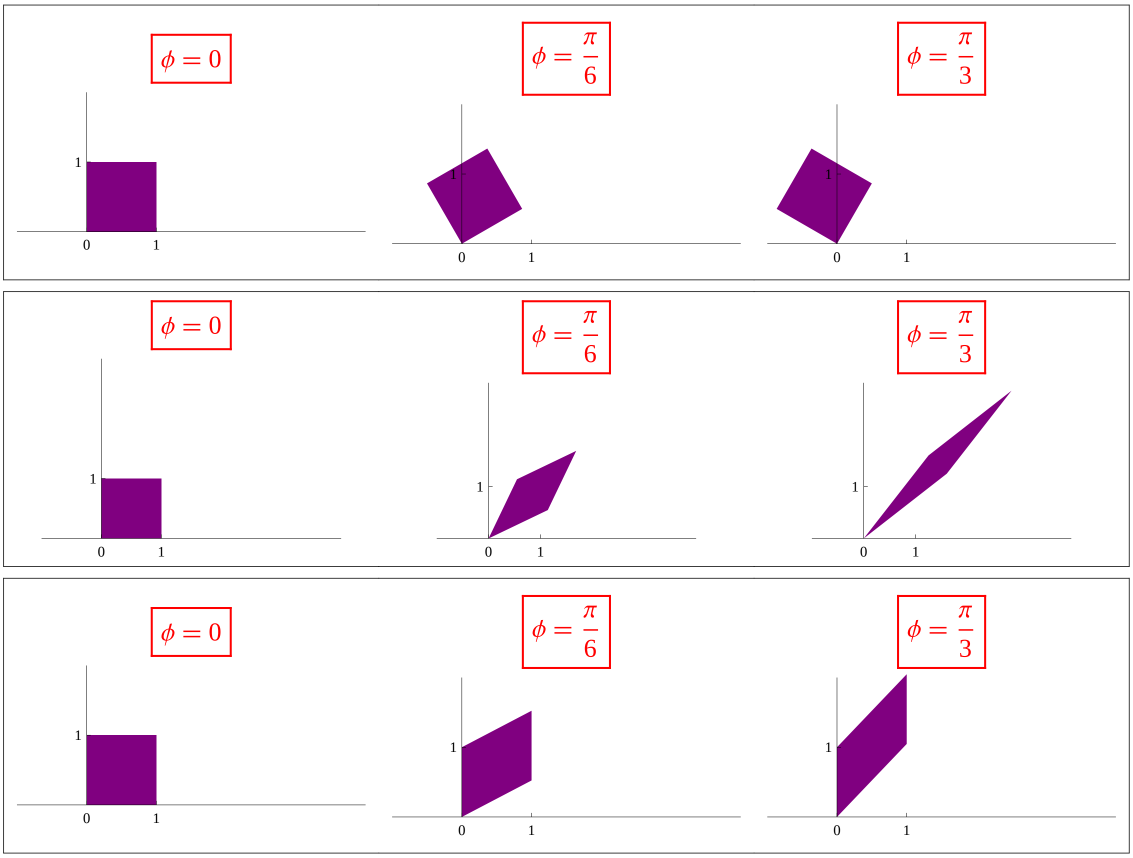
Bewijs (9):

$$\sin\epsilon\,\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(\epsilon\,\phi)^{2n+1} = \epsilon\,\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(\epsilon\,\phi)^{2n+1} = \epsilon\,\phi + \epsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(\epsilon\,\phi)^{2(n-1)}\,\phi^2 \overset{*}{=} \epsilon\,\phi\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **c.** Welke van de drie functies in de vergelijkingen (1–3) zijn periodiek? Geef een zo nauwkeurig mogelijk antwoord.

De goniometrische functies (1–2) zijn periodiek als $z \in \mathbb{R}$. De exponentiële functie (3) is periodiek als $z \in i\mathbb{R}$, d.w.z. zuiver imaginair. De periode is in alle gevallen 2π. Uit de representaties bij **a** en **b** volgt dat geen van deze functies periodiek is op een ander domein.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Kies een vaste[1] $\phi \in \mathbb{R}$. Schets in drie afzonderlijke (x, y)-vlakken de beelden van het gebied $\Omega : 0 \leq x, y \leq 1$ onder de afbeeldingen $A_{\mathbb{R}^2}$, $A_{\mathbb{C}}$, respectievelijk $A_{\mathbb{D}}$. Geef in elke schets aan welke meetkundige rol de variabele ϕ hierin speelt. Bepaal tenslotte de oppervlakte van de respectievelijke beelden van Ω (met bewijs).



Figuur 1: Van boven naar beneden: $A_{\mathbb{R}^2}(\Omega)$, $A_{\mathbb{C}}(\Omega)$, $A_{\mathbb{D}}(\Omega)$ voor parameters $\phi = 0, \pi/6, \pi/3$.

[1] Kies voor je schetsen $0 < \phi < \pi/2$.

Zie Fig. 1. Op de bovenste rij is de variabele ϕ precies de hoek (modulo 2π) die het $A_{\mathbb{R}^2}$-beeld van de rechthoekszijde met eindpunten $(0,0)$ en $(1,0)$ maakt met de x-as, in tegenwijzerrichting. Op de middelste rij wordt het verband tussen ϕ en de door de $A_{\mathbb{C}}$-beelden van de twee rechthoekszijden grenzend aan de oorsprong ingesloten hoek ψ gegeven door de relatie $\psi = \arccos \tanh 2\phi$. Of ook: Als χ de hoek is die het $A_{\mathbb{C}}$-beeld van de rechthoekszijde met eindpunten $(0,0)$ en $(1,0)$ maakt met de x-as, dan geldt $\chi = \arctan \tanh \phi$. Op de onderste rij is ϕ precies de afstand van de x-as tot het $A_{\mathbb{D}}$-beeld van het hoekpunt $(1,0)$.

Tenslotte, omdat alle afbeeldingen lineair zijn en Ω oppervlakte 1 heeft, geldt dat de oppervlakte van het gebied $A_{\mathbb{R}^2}(\Omega)$, $A_{\mathbb{C}}(\Omega)$, respectievelijk $A_{\mathbb{D}}(\Omega)$, wordt gegeven door de determinant van de respectievelijke afbeelding: $\det A_{\mathbb{R}^2} = \det A_{\mathbb{C}} = \det A_{\mathbb{D}} = 1$.

EINDE