HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Deadline: vrijdag 11 april 2008.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opdracht alleen of samen met maximaal één voor dit vak ingeschreven medestudent(e).
- Schrijf na(a)m(en) en studentnummer(s) op elk ingeleverde vel.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.
- Over de details van de opdracht worden voor de inleverdatum geen *specifieke* vragen beantwoord. (Vragen van *algemene* aard zijn uiteraard ten allen tijde welkom!)
- Lever deze huiswerkopdracht in vóór het verstrijken van de aangegeven deadline bij de docent of een van de assistenten. Huiswerkopdrachten die later binnenkomen worden niet nagekeken.
- Deze opdracht levert maximaal één bonuspunt op, welk zal worden opgeteld bij het (her)tentamencijfer voor het vak 8D020 (alleen geldig in het academisch jaar 2007–2008).

VEEL SUCCES!

(10) Opgave.

In deze opgave vergelijken we volgende drie lineaire afbeeldingen:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
A_{\mathbb{R}^2} & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & : & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & A_{\mathbb{R}^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
A_{\mathbb{C}} & : & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} & : & \begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} & \mapsto & A_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos i\phi & -\sin i\phi \\ \sin i\phi & \cos i\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ iy \end{pmatrix}, \\
A_{\mathbb{D}} & : & \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} & : & \begin{pmatrix} x \\ \epsilon y \end{pmatrix} & \mapsto & A_{\mathbb{D}}\begin{pmatrix} x \\ \epsilon y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\epsilon\phi & -\sin\epsilon\phi \\ \sin\epsilon\phi & \cos\epsilon\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \epsilon y \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Hierin zijn $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de welbekende verzamelingen van *reële getallen*, respectievelijk *complexe getallen*, met de gangbare algebraïsche rekenregels voor optellen en vermenigvuldigen. De verzameling $\mathbb{D}$ bevat de zogenaamde *duale getallen*. Een duaal getal $z \in \mathbb{D}$ kan geschreven worden als $z = x + \epsilon\, y$, met $x, y \in \mathbb{R}$ en zuiver "imaginaire" constante $\epsilon \neq 0$, met de definiërende eigenschap $\epsilon^2 = 0$ (analoog aan de schrijfwijze $z = x + i\, y$ met $i^2 = -1$ voor $z \in \mathbb{C}$). Om de analogieën te benadrukken kiezen we in bovenstaande definities in alle gevallen voor een kolomrepresentatie, d.w.z. we identificeren

$$
x + i\, y \equiv \begin{pmatrix} x \\ i\, y \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \qquad \text{respectievelijk} \qquad x + \epsilon\, y \equiv \begin{pmatrix} x \\ \epsilon\, y \end{pmatrix} \in \mathbb{D}\,.
$$

We kunnen op de voor de hand liggende manier $\mathbb{R}$ opvatten als deelverzameling van zowel $\mathbb{C}$ als $\mathbb{D}$, en zowel $\mathbb{C}$ als $\mathbb{D}$ identificeren met het vlak $\mathbb{R}^2$. De rekenregels voor vermenigvuldigen en optellen op $\mathbb{D}$ zijn geheel analoog aan die van $\mathbb{C}$, afgezien van de nilpotente eigenschap $\epsilon^2 = 0$.

De goniometrische functies op $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ en $\mathbb{D}$ zijn gedefinieerd bij de gratie van hun convergente Taylorreeksen:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \tag{1}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}. \tag{2}$$

Dit geldt ook voor de exponentiële functie:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \tag{3}$$

($2\frac{1}{2}$) **a.** Bewijs dat voor $\phi \in \mathbb{R}$ geldt:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi, \tag{4}$$

$$\cos i\phi = \cosh\phi, \tag{5}$$

$$\sin i\phi = i\sinh\phi. \tag{6}$$

($2\frac{1}{2}$) **b.** Bewijs dat voor $\phi \in \mathbb{R}$ geldt:

$$e^{\epsilon\phi} = 1 + \epsilon\phi, \tag{7}$$

$$\cos\epsilon\phi = 1, \tag{8}$$

$$\sin\epsilon\phi = \epsilon\phi. \tag{9}$$

($2\frac{1}{2}$) **c.** Welke van de drie functies in de vergelijkingen (1–3) zijn periodiek? Geef een zo nauwkeurig mogelijk antwoord.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Kies een vaste[1] $\phi \in \mathbb{R}$. Schets in drie afzonderlijke (x, y)-vlakken de beelden van het gebied $\Omega : 0 \leq x, y \leq 1$ onder de afbeeldingen $A_{\mathbb{R}^2}$, $A_{\mathbb{C}}$, respectievelijk $A_{\mathbb{D}}$. Geef in elke schets aan welke meetkundige rol de variabele ϕ hierin speelt. Bepaal tenslotte de oppervlakte van de respectievelijke beelden van Ω (met bewijs).

EINDE

[1] Kies voor je schetsen $0 < \phi < \pi/2$.