HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl, **T** 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave bij voorkeur in zelf te vormen *groepjes van maximaal vier studenten*.
- Schrijf ieders naam en studentnummer op elk ingeleverde vel.
- De uiterste inleverdatum is *maandag 10 februari 2003* (voorafgaand aan of na afloop van het hoorcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken.
- Correct ingeleverde uitwerkingen worden beloond met een cijfer tussen 0.0 en 1.0. Dit levert een bonus die zal worden opgeteld bij je tentamencijfer van 21 maart 2003 (dus *niet* bij het cijfer van een eventueel hertentamen!), met dien verstande dat het eindcijfer niet hoger kan zijn dan tien.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe.
- Bij onderstaande opgaven heb je de laatste versie van het dictaat nodig. Vergelijk dus eerst je eigen dictaat met de meest recente digitale versie (zie boven voor het webadres) voor eventuele correcties.

Opgave.

(0.1) **a.** Paragraaf 1.6.1, eerste opgave onder Lemma 1: "With the inner product given by Eq. (1.27)..."

Pas vgl. (1.30) toe met $v \equiv f$ en $w \equiv g_i$ met achtereenvolgens $i = 0, 1, 2$ en gebruik het inprodukt van vgl. (1.27): $P_{g_i}(f) = (\langle g_i|f\rangle / \langle g_i|g_i\rangle)\, g_i = (\int_0^1 g_i(x)f(x)dx / \int_0^1 (g_i(x))^2 dx)\, g_i$. De inprodukten die we nodig hebben zijn de volgende: $\langle g_0|g_0\rangle = \int_0^1 dx = 1$, $\langle g_1|g_1\rangle = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$, $\langle g_2|g_2\rangle = \int_0^1 x^4 dx = 1/5$, $\langle g_0|f\rangle = \int_0^1 e^x dx = e-1$, $\langle g_1|f\rangle = \int_0^1 xe^x dx = 1$, $\langle g_2|f\rangle = \int_0^1 x^2 e^x dx = e-2$. Daarmee krijgen we $[P_{g_0}(f)](x) = e-1$, $[P_{g_1}(f)](x) = 3x$, $[P_{g_2}(f)](x) = 5(e-2)x^2$.

(0.1) **b.** Paragraaf 1.6.1, tweede opgave onder Lemma 1: "Let V be the inner product space..."

Voor het bewijs dat $\{g_0, g_1, g_2\}$ een basis van V vormt passen we Definitie 11 toe. De niet-triviale stap is het bewijs van de implicatie van links naar rechts. Beschouw dus een willekeurige lineaire combinatie van de drie vectoren (functies) en stel deze gelijk aan de nulvector (nulfunctie): $ag_0 + bg_1 + cg_2 = 0$ d.e.s.d.a. $ag_0(x) + bg_1(x) + cg_2(x) = a + bx + cx^2 = 0$ voor alle $x \in [0, 1]$. In het linkerlid staat dus het functievoorschrift van de nulfunctie, maar dat is alleen zo als $a = b = c = 0$, waarmee het bewijs van lineaire onafhankelijkheid van het drietal $\{g_0, g_1, g_2\}$ voltooid is. N.B.: Om te bewijzen dat $a = b = c = 0$ kun je ook drie verschillende waarden voor x invullen, bijvoorbeeld $x = 0, 1/2, 1$; je krijgt dan een stelsel van drie lineair onafhankelijke vergelijkingen in a, b, c, waaruit $a = b = c = 0$ volgt. Ook kun je het linkerlid tezamen met zijn eerste en tweede orde afgeleiden beschouwen in $x = 0$; dit levert direct $a = b = c = 0$. (Strict genomen zou je voor x een inwendig punt in het open interval $(0, 1)$ moeten nemen; in dat geval levert de methode wederom een eenvoudig op te lossen lineair onafhankelijk stelsel op.) Definitie 11 bevat overigens nog een tweede clausule: V moet het opspansel zijn van het drietal vectoren $\{g_0, g_1, g_2\}$. Maar dit is per definitie het geval.

Conclusie: $\{g_0, g_1, g_2\}$ vormt inderdaad een basis van V, maar deze is niet orthogonaal. Het volstaat om te laten zien dat een tweetal vectoren hierin niet orthogonaal is, bijvoorbeeld $\langle g_0|g_1\rangle = \int_0^1 x dx = 1/2 \neq 0$.

Stelling 2 (Gram-Schmidt) schrijft in dit geval drie stappen voor om van de niet-orthogonale basis $\{g_0, g_1, g_2\}$ over te gaan op een orthogonale, zeg $\{h_0, h_1, h_2\}$, met hetzelfde opspansel. In plaats van v_i en e'_i schrijven we g_i, respectievelijk h_i. Let op onze afwijkende indexering, die begint bij 0 in plaats van 1 zoals in Stelling 2!

Stap 1: $h_0 = g_0$, dus $h_0(x) = 1$. Dit is gewoon een vrije keuze.

Stap 2: $h_1 = g_1 - P_{h_0}(g_1) = g_1 - (\langle h_0|g_1\rangle / \langle h_0|h_0\rangle)h_0$. Hiervoor hebben we de volgende inprodukten nodig:

- $\langle h_0|g_1\rangle = \int_0^1 h_0(x)g_1(x)dx = \int_0^1 xdx = 1/2$ en
- $\langle h_0|h_0\rangle = \int_0^1 dx = 1$.

Dus $h_1(x) = x - 1/2$.

Stap 3: $h_2 = g_2 - P_{h_0}(g_2) - P_{h_1}(g_2) = g_2 - (\langle h_0|g_2\rangle / \langle h_0|h_0\rangle)h_0 - (\langle h_1|g_2\rangle / \langle h_1|h_1\rangle)h_1$. Naast reeds bepaalde inprodukten hebben we nodig:

- $\langle h_0|g_2\rangle = \int_0^1 h_0(x)g_2(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = 1/3$,
- $\langle h_1|g_2\rangle = \int_0^1 (x - 1/2)x^2 dx = 1/12$ en
- $\langle h_1|h_1\rangle = \int_0^1 (x - 1/2)^2 dx = 1/12$.

Dus $h_2(x) = x^2 - 1/3 - (x - 1/2) = x^2 - x + 1/6$.

Uiteraard mogen we van elke geconstrueerde vector een handig veelvoud nemen, bijvoorbeeld $\{h_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1, h_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x - 1, h_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 6x^2 - 6x + 1\}$ vormt een orthogonale basis.

(0.1) **c.** Paragraaf 1.6.2, tweede opgave onder Eq. (1.33): "In analogy with..."

Per definitie geldt $\cos\alpha_i = \langle f|g_i\rangle / (\|f\|_2 \|g_i\|_2)$, $i = 0, 1, 2$. Met de integraalformule voor het relevante inprodukt (merk op dat de L^2-normen in de noemer geschreven kunnen worden in termen van het inprodukt: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f|f\rangle}$, respectievelijk $\|g_i\|_2 = \sqrt{\langle g_i|g_i\rangle}$) krijgen we

- $\cos\alpha_0 = \frac{(e-1)\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}$, oftewel $\alpha_0 \approx 0.278856$ (radialen) of $\alpha_0 \approx 15.9773°$,
- $\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{e^2-1}}$, oftewel $\alpha_1 \approx 0.249343$ (radialen) of $\alpha_1 \approx 14.2863°$,
- $\cos\alpha_2 = \frac{(e-2)\sqrt{10}}{\sqrt{e^2-1}}$, oftewel $\alpha_2 \approx 0.45418$ (radialen) of $\alpha_2 \approx 26.0226°$.

(0.1) **d.** Paragraaf 1.6.2, eerste opgave onder Definition 17: "Let $\mathbf{s} = \{0, 1, 2, 6, 2, 1, 0\}$..."

- $\|\mathbf{s}\|_1 = |0| + |1| + |2| + |6| + |2| + |1| + |0| = 12$,
- $\|\mathbf{s}\|_2 = \sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |2|^2 + |6|^2 + |2|^2 + |1|^2 + |0|^2} = \sqrt{46} \approx 6.78233$,
- $\|\mathbf{s}\|_\infty = \max\{|0|, |1|, |2|, |6|, |2|, |1|, |0|\} = 6$,
- $\|\mathbf{f}\|_1 = |0| + |-1| + |0| + |-1| + |4| + |-1| + |0| + |-1| + |0| = 8$,
- $\|\mathbf{f}\|_2 = \sqrt{|0|^2 + |-1|^2 + |0|^2 + |-1|^2 + |4|^2 + |-1|^2 + |0|^2 + |-1|^2 + |0|^2} = 2\sqrt{5} \approx 4.47214$,
- $\|\mathbf{f}\|_\infty = \max\{|0|, |-1|, |0|, |-1|, |4|, |-1|, |0|, |-1|, |0|\} = 4$.

(0.1) **e.** Paragraaf 1.6.2, tweede opgave onder Theorem 5: "Let $H^1(\mathbb{R})$ be the function space..."

We moeten allereerst bewijzen dat het rechterlid goed gedefiniëerd is. Aangezien $\langle f|g\rangle_{H^1} = \langle f|g\rangle + \langle f'|g'\rangle$, waarbij rechts de bekende standaard (L^2) functie-inprodukten staan, kunnen we de volgende afschatting maken: $|\langle f|g\rangle_{H^1}| =$

$|\langle f|g\rangle + \langle f'|g'\rangle| \leq |\langle f|g\rangle| + |\langle f'|g'\rangle| \leq \|fg\|_1 + \|f'g'\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2 + \|f'\|_2\|g'\|_2 < \infty$. In de voorlaatste ongelijkheid is de Schwartz ongelijkheid gebruikt en in de laatste het feit dat $f, g \in H^1(\mathbb{R})$, hetgeen juist wil zeggen dat $\|f\|_2, \|g\|_2, \|f'\|_2$ en $\|g'\|_2$ alle eindig zijn.

Om te bewijzen dat het rechterlid inderdaad een inprodukt definiëert moeten we Definitie 12 uit het dictaat nalopen. Het is handig om gebruik te maken van het feit dat $\langle f|g\rangle_{H^1} = \langle f|g\rangle + \langle f'|g'\rangle$, aangezien we van de afzonderlijke termen rechts al weten dat deze een inprodukt definiëren. Stel $f, g, h \in H^1(\mathbb{R})$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ willekeurig:

- $\langle \lambda f + \mu g|h\rangle_{H^1} = \langle \lambda f + \mu g|h\rangle + \langle (\lambda f + \mu g)'|h'\rangle = \langle \lambda f + \mu g|h\rangle + \langle \lambda f' + \mu g'|h'\rangle = \lambda^*\langle f|h\rangle + \mu^*\langle g|h\rangle + \lambda^*\langle f'|h'\rangle + \mu^*\langle g'|h'\rangle = \lambda^*(\langle f|h\rangle + \langle f'|h'\rangle) + \mu^*(\langle g|h\rangle + \langle g'|h'\rangle) = \lambda^*\langle f|h\rangle_{H^1} + \mu^*\langle g|h\rangle_{H^1}$. Bij de tweede gelijkheid is lineariteit van differentiëren gebruikt, bij de derde gelijkheid is gebruik gemaakt van het feit dat $\langle\ |\ \rangle$ een inprodukt is.
- $\langle f|\lambda g + \mu h\rangle_{H^1} = \langle \lambda g + \mu h|f\rangle^*_{H^1} = \left(\lambda^*\langle g|f\rangle_{H^1} + \mu^*\langle h|f\rangle_{H^1}\right)^* = \lambda\langle g|f\rangle^*_{H^1} + \mu\langle h|f\rangle^*_{H^1} = \lambda\langle f|g\rangle_{H^1} + \mu\langle f|h\rangle_{H^1}$. In de eerste gelijkheid is vooruitgelopen op het volgende onderdeel, in de tweede is gebruik gemaakt van het eerder bewezene en in de laatste is wederom vooruitgelopen op het volgende onderdeel. Je kunt dit onderdeel uiteraard ook bewijzen op analoge wijze als het eerste, dus zonder gebruik te maken van het volgende onderdeel.
- $\langle f|g\rangle_{H^1} = \langle f|g\rangle + \langle f'|g'\rangle = \langle g|f\rangle^* + \langle g'|f'\rangle^* = (\langle g|f\rangle + \langle g'|f'\rangle)^* = \langle g|f\rangle^*_{H^1}$. Wederom is gebruik gemaakt van het feit dat we weten dat $\langle\ |\ \rangle$ een inprodukt is. Hiermee is ook het bewijs van het vorige onderdeel voltooid.
- $\langle f|f\rangle_{H^1} = \langle f|f\rangle + \langle f'|f'\rangle > 0$ voor alle $f \neq 0$ aangezien dit geldt voor zowel $\langle f|f\rangle$ als $\langle f'|f'\rangle$ afzonderlijk. Trivialiter geldt tenslotte dat $\langle 0|0\rangle_{H^1} = 0$.

(0.1) **f.** Paragraaf 1.6.3.1, tweede opgave onder Result 1: "Consider the mapping $\mathcal{D} : C^{k+1} \longrightarrow C^k \ldots$"

Stel $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in C^{k+1}$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan geldt $\mathcal{D}(\lambda\mathbf{s}_1 + \mu\mathbf{s}_2) = d/dt\,(\lambda\mathbf{s}_1 + \mu\mathbf{s}_2) = \lambda d\mathbf{s}_1/dt + \mu d\mathbf{s}_2/dt = \lambda\mathcal{D}(\mathbf{s}_1) + \mu\mathcal{D}(\mathbf{s}_2)$.

(0.1) **g.** Paragraaf 1.7, eerste opgave onder Definition 28: "Verify that convolution of images…"

Stel V is een geschikt gekozen vectorruimte van functies, en $f, g, h \in V$ willekeurige elementen. In dat geval moeten we convolutie toetsen aan de criteria van Definitie 26. We nemen hieronder gemakshalve aan dat de betreffende integralen goed gedefiniëerd zijn en dat we vrijelijk van integratievolgorde mogen wisselen. Waar accentjes staan is substitutie van variabelen toegepast.

- $((f*g)*h)(x) = \int (f*g)(y)h(x-y)dy = \int \left(\int f(z)g(y-z)dz\right) h(x-y)dy = \int f(z)\left(\int g(y-z)h(x-y)dy\right)dz = \int f(z)\left(\int g(y')h(x-z-y')dy'\right)dz = \int f(z)(g*h)(x-z)dz = (f*(g*h))(x)$ voor (bijna) alle x, dus $(f*g)*h = f*(g*h)$.
- $(f*(g+h))(x) = \int f(y)(g+h)(x-y)dy = \int f(y)(g(x-y) + h(x-y))dy = \int f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)dy = \int f(y)g(x-y)dy + \int f(y)h(x-y)dy = (f*g)(x) + (f*h)(x)$ voor (bijna) alle x, dus $(f*(g+h) = f*g + f*h$.
- Dat tevens geldt $(f+g)*h = f*h + g*h$ volgt uit het vorige onderdeel en het feit dat een convolutie-algebra commutatief is: $(f*g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y')f(x-y')dy' = (g*f)(x)$ voor (bijna) alle x, dus $f*g = g*f$.

(0.1) **h.** Paragraaf 2.1.1, eerste opgave onder Figure 2.1: "The Riemann sum approximation…"

De oppervlakte van de elementaire trapezoïde ingesloten door γ_k is gelijk aan het produkt van haar breedte, $\Delta x = x_k - x_{k-1}$, en haar gemiddelde hoogte, $(f(x_{k-1}) + f(x_k))/2$. Al deze oppervlakten bij elkaar geteld leidt tot de gegeven som over $k = 1, \ldots, N$.

(0.1) **i.** Paragraaf 2.1.2, eerste opgave onder Box 2.3: "Cf. the rightmost image in Figure 2.5…"

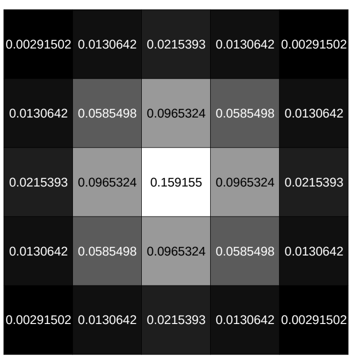
Zie Figuur 2.5. Schuif het middelste filter masker zodanig over het linker beeld dat zijn middelste pixel (met filterwaarde 4) samenvalt met het beeldpixel met coördinaten $(2, 7)$, dat is het beeldpixel met waarde 80. (Omdat het hier gaat over correlatie en niet convolutie hoeven we het masker niet te spiegelen, hetgeen overigens niet had uitgemaakt vanwege zijn symmetrie.) Vermenigvuldig pixelgewijs en tel op. Het resultaat is $0 \times 3 - 1 \times 50 + 0 \times 85 - 1 \times 35 + 4 \times 80 - 1 \times 101 + 0 \times 61 - 1 \times 104 + 0 \times 110 = 30$.

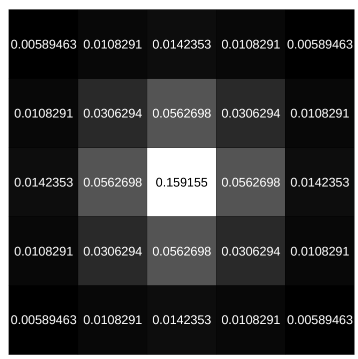
(0.1) **j.** Paragraaf 2.1.2, naar keuze voorlaatste of laatste opgave: "Let $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ be the filter...", resp. "Same questions as in the previous exercise..."

Beide functies zijn rotatiesymmetrisch. Het ligt daarom voor de hand om poolcoördinaten te gebruiken. Bij de Gaussische functie leidt dit tot $\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y, \sigma)dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] rd\phi dr = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty r \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right] dr = \left[-\exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right]\right]_0^\infty = 1$. Merk op dat de Jacobideterminant (de factor r) ons hier goed van pas komt! Terzijde: Aangezien de Gaussische functie separabel is kun je nu óók de Gaussische integraal in het ééndimensionale geval uitvoeren. (Hoe?)

Bij de functie uit de volgende oefening krijgen we $\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y, \sigma)dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+r^2}\right)^{\frac{3}{2}} rd\phi dr = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty r \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+r^2}\right)^{\frac{3}{2}} dr = \left[-\left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2+r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]_0^\infty = 1$.

Bij discretisatie van $g(x, y, 1)$ op een 5×5 rooster krijgen we een discreet filter. De meest eenvoudige manier van discretiseren leidt tot het discrete filter $\{g(i, j, 1)\}_{-2 \leq i,j \leq 2}$. Onderstaande figuur toont de betreffende discretisaties van de twee bovengenoemde filters (de grijswaarde is evenredig met de numerieke waarde).





De som van alle pixelwaarden voor het linker filter is ongeveer 0.981815, die voor het rechter filter 0.673904. De normering blijft dus niet behouden vanwege enerzijds discretisatie (benadering) en anderzijds afkapping (verwaarlozing). In het algemeen zal normering nooit exact behouden blijven. Willen we dus bij gegeven $\sigma = 1$ en gegeven roosterafmeting (5×5) discrete filters waarvan de 1-norm wel exact 1 is, dan kunnen we bijvoorbeeld alle pixels delen door een constante, i.c. 0.981815 respectievelijk 0.673904.

EINDE