HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl,
T 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave bij voorkeur in zelf te vormen groepjes van twee studenten. (Meer dan twee is niet toegestaan; alleen mag desnoods wel.)
- Schrijf beide namen en studentnummers op elk ingeleverde vel.
- De uiterste inleverdatum is *maandag 13 januari 2003* (voorafgaand aan of na afloop van het hoorcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken.
- Correct ingeleverde uitwerkingen worden beloond met een cijfer tussen 0.0 en 1.0. Dit levert een bonus die zal worden opgeteld bij je tentamencijfer van 21 maart 2003 (dus *niet* bij het cijfer van een eventueel hertentamen!), met dien verstande dat het eindcijfer niet hoger kan zijn dan tien.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Het wordt in deze opgave sterk aanbevolen *haakjes* te gebruiken waar nodig om verwarring te voorkomen.

Opgave. We bekijken de lineaire ruimte V van alle tweedimensionale digitale beelden bestaande uit $N \times N$ reëelwaardige pixels. In tegenstelling tot de conventies in het dictaat noteren we de binaire vectorsomoperator als $\oplus$ ter onderscheid van de gewone opteloperator $+$ voor reële getallen. De infix operator voor scalaire veelvouden wordt hier aangeduid met het symbool $\otimes$.

(0.2) **a.** Stel $f, g \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Leg uit wat er bedoeld wordt met de vectorsom $f \oplus g \in V$ en het scalaire veelvoud $\lambda \otimes f \in V$ in termen van gewone optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$.

De vectorsom $f \oplus g$ is het $N \times N$ beeld met pixelwaarden $(f \oplus g)[i,j] = f[i,j] + g[i,j]$ voor $i, j = 1, \ldots, N$. Het scalaire veelvoud $\lambda \otimes f$ is het $N \times N$ beeld met pixelwaarden $\lambda f[i,j]$ voor $i, j = 1, \ldots, N$.

(0.2) **b.** Welk $N \times N$ beeld vervult de rol van

b1. neutraal element $o \in V$,

b2. tegengestelde element $-f \in V$ bij gegeven $f \in V$?

Je hoeft in dit onderdeel nog geen bewijs hiervoor te leveren.

Neutraal element $o \in V$ is het $N \times N$ beeld waarvan alle pixelwaarden nul zijn: $o[i,j] = 0$, $i, j = 1, \ldots, N$. Als $f \in V$ dan is $-f$ het $N \times N$ beeld met pixelwaarden $(-f)[i,j] = -f[i,j]$, $i, j = 1, \ldots, N$.

(0.5) **c.** Toon aan dat V een reële vectorruimte is door te bewijzen dat aan alle spelregels (Definitie 9 in Paragraaf 1.6 van het dictaat, met uiteraard $\oplus$ en $\otimes$ in plaats van $+$ en $\cdot$) is voldaan.

V vormt een commutatieve groep ten aanzien van de vectoroptelling, immers als $f, g, h \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $i, j = 1, \ldots, N$ willekeurig, dan:

1. $((f \oplus g) \oplus h)[i,j] = (f \oplus g)[i,j] + h[i,j] = (f[i,j] + g[i,j]) + h[i,j] = f[i,j] + (g[i,j] + h[i,j]) = f[i,j] + (g \oplus h)[i,j] = (f \oplus (g \oplus h))[i,j]$, m.a.w. $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$.

2. Met $o \in V$ zoals gedefiniëerd in onderdeel **b1** hebben we $(o \oplus f)[i,j] = o[i,j] + f[i,j] = 0 + f[i,j] = f[i,j]$, dus $o \oplus f = f$. Evenzo bewijs je dat $f \oplus o = f$.

3. Met $-f \in V$ en $o \in V$ zoals gedefiniëerd in onderdeel **b2** hebben we $(f \oplus (-f))[i,j] = f[i,j] + (-f)[i,j] = f[i,j] + (-f[i,j]) = f[i,j] - f[i,j] = 0 = o[i,j]$, dus $f \oplus (-f) = o$. Net zo bewijs je dat $(-f) \oplus f = o$.

4. $(f \oplus g)[i,j] = f[i,j] + g[i,j] = g[i,j] + f[i,j] = (g \oplus f)[i,j]$, dus $f \oplus g = g \oplus f$.

Voor de scalairvermenigvuldiging geldt het volgende:

1. $(\lambda \otimes (f \oplus g))[i,j] = \lambda((f \oplus g)[i,j]) = \lambda(f[i,j] + g[i,j]) = \lambda f[i,j] + \lambda g[i,j] = (\lambda \otimes f)[i,j] + (\lambda \otimes g)[i,j] = (\lambda \otimes f + \lambda \otimes g)[i,j]$, m.a.w. $\lambda \otimes (f \oplus g) = \lambda \otimes f + \lambda \otimes g$.

2. $((\lambda + \mu) \otimes f)[i,j] = (\lambda + \mu) f[i,j] = \lambda f[i,j] + \mu f[i,j] = (\lambda \otimes f)[i,j] + (\mu \otimes f)[i,j] = ((\lambda \otimes f) \oplus (\mu \otimes f))[i,j]$, dus $(\lambda + \mu) \otimes f = (\lambda \otimes f) \oplus (\mu \otimes f)$. NB: Het is gebruikelijk—zoals impliciet gedaan is in het dictaat—om af te spreken dat $\otimes$ hogere precedentie heeft dan $\oplus$, zodat we het rechterlid ook zonder haken mogen schrijven: $(\lambda \otimes f) \oplus (\mu \otimes f) = \lambda \otimes f \oplus \mu \otimes f$.

3. $((\lambda\mu) \otimes f)[i,j] = (\lambda\mu) f[i,j] = \lambda(\mu f[i,j]) = \lambda((\mu \otimes f)[i,j]) = (\lambda \otimes (\mu \otimes f))[i,j]$, dus $(\lambda\mu) \otimes f = \lambda \otimes (\mu \otimes f)$.

4. Tenslotte, $(1 \otimes f)[i,j] = 1 f[i,j] = f[i,j]$, dus $1 \otimes f = f$.

(0.1) **d.** Er bestaat formeel geen vectorsubtractie $f \ominus g$, $f, g \in V$. We kunnen deze definiëren op analoge wijze zoals dat met vectorsommatie gebeurt, dus in termen van pixelwaarden: $(f \ominus g)[i,j] = f[i,j] - g[i,j]$. De vectorsubtractie operator $\ominus$ kan echter ook gedefiniëerd worden zònder omweg via pixels, d.w.z. uitsluitend in termen van vectoren $f, g \in V$ en de elementaire vectorruimte operatoren $\oplus$ en $\otimes$. Hoe?

Het vectorverschil $f \ominus g$ kan opgevat worden als de vectorsom van f en het tegengestelde element dat bij g hoort: $f \ominus g = f \oplus (-g)$. Merk op dat het $-$ teken in het rechterlid geen binaire operator is, maar uitsluitend betrekking heeft op g en de betekenis heeft van "tegengestelde van". In plaats van de notatie $-g$ kom je dan ook vaak g^{inv} tegen.

EINDE