HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Deadline: donderdag 20 maart 2008.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opdracht alleen of samen met maximaal één voor dit vak ingeschreven medestudent(e).
- Schrijf na(a)m(en) en studentnummer(s) op elk ingeleverde vel.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.
- Over de details van de opdracht worden voor de inleverdatum geen *specifieke* vragen beantwoord. (Vragen van *algemene* aard zijn uiteraard ten allen tijde welkom!)
- Lever deze huiswerkopdracht in vóór het verstrijken van de aangegeven deadline bij de docent of een van de assistenten. Huiswerkopdrachten die later binnenkomen worden niet nagekeken.
- Deze opdracht levert maximaal één bonuspunt op, welk zal worden opgeteld bij het (her)tentamencijfer voor het vak 8D020 (alleen geldig in het academisch jaar 2007–2008).

VEEL SUCCES!

(**10**) **Opgave.** We construeren een lineaire ruimte van eerste orde partiële differentiaaloperatoren in $\mathbb{R}^2$ als volgt:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Span} \mathscr{B} \quad \text{waarbij} \quad \mathscr{B} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} .$$

Hierin staat $\operatorname{Span} \mathscr{B}$ voor het opspansel gegenereerd door de elementen van de set $\mathscr{B}$. De elementen van $\operatorname{Span} \mathscr{B}$ zijn dus vectoren die opgevat kunnen worden als operatoren van het volgende type:

$$\frac{\partial}{\partial x} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x} ,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial y} ,$$

waarin x en y duiden op het eerste, respectievelijk tweede argument van de functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. We beschouwen gemakshalve alleen reëelwaardige functies en lineaire ruimten en afbeeldingen over het scalairlichaam $\mathbb{R}$.

a. Leg uit wat de definitie van V inhoudt door de volgende vragen te beantwoorden.

(1) **a1.** Welke gedaante heeft een willekeurig element $v \in V$?

Stel $v \in V$, dus $v : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : f \mapsto v(f)$ is een lineaire combinatie van elementen in $\mathscr{B}$, m.a.w. $v = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$ voor zekere $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. (Merk op dat het scalairlichaam $\mathbb{R}$ en niet $\mathbb{C}$ is.)

(2) **a2.** Wat wordt er precies bedoeld met "vectoroptelling" en "scalairvermenigvuldiging" op V in termen van de gewone optelling en vermenigvuldiging van reële getallen?

Met een lineaire combinatie van de vorm $\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$, met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wordt bedoeld:

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : f \mapsto \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} \right) f \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} ,$$

waarbij in het rechterlid de gebruikelijke functie-optelling en scalairvermenigvuldiging op $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ is gebruikt. Deze is op haar beurt als volgt gedefinieerd in termen van de gewone optelling en vermenigvuldiging van reële getallen: Als $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, en $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dan wordt met $\alpha f + \beta g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ die functie aangeduid waarvoor geldt

$$\alpha f + \beta g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (\alpha f + \beta g)(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha f(x, y) + \beta g(x, y) ,$$

met $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ willekeurig.

(1) **a3.** Wat wordt er bedoeld met "de componenten van $v \in V$ ten opzichte van de basis $\mathscr{B}$"?

Als $v = \alpha \dfrac{\partial}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial}{\partial y}$, dan zijn $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ per definitie de componenten van $v \in V$ t.o.v. de basis $\mathscr{B}$. In het bijzonder geldt dat de componenten van de twee basisvectoren in $\mathscr{B}$ gegeven worden door $(1, 0)$, respectievelijk $(0, 1)$.

Met een gegeven functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ associëren we een afbeelding

$$df : V \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : v \mapsto df(v) \stackrel{\text{def}}{=} v(f) .$$

(2) **b.** Bewijs dat $df \in \mathscr{L}(V, C^\infty(\mathbb{R}^2))$, d.w.z. bewijs dat df een lineaire afbeelding is.

Zij $v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan

$$df(\alpha v + \beta w) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha v + \beta w)(f) = \alpha v(f) + \beta w(f) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\, df(v) + \beta\, df(w) .$$

In de middelste vergelijking is gebruik gemaakt van de definitie van vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging van afbeeldingen, in dit geval lineaire partiële differentiaaloperatoren $v, w \in V$. De overige gelijkheden volgen uit de definitie van df.

Voor gegeven functies $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ beschouwen we de afbeelding $\omega = g\, df \in \mathscr{L}(V, C^\infty(\mathbb{R}^2))$, waarbij we het product van $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ en $df \in \mathscr{L}(V, C^\infty(\mathbb{R}^2))$ als volgt definiëren in termen van het gebruikelijke functieproduct op $C^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$g\, df : V \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : v \mapsto g\, df(v) .$$

(Met $g\, df(v)$ bedoelen we $g\,(df(v))$; merk op dat g en $df(v)$ functies in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ zijn.)

(1) **c.** Leg uit wat hier bedoeld wordt met het "gebruikelijke functieproduct op $C^\infty(\mathbb{R}^2)$".

Merk op dat $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ evenals $df(v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. I.h.a. geldt voor het "gebruikelijke functieproduct" van twee functies $g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ per definitie $(g\, h)(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, y)\, h(x, y)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (Caveat: De buitenste haken in de uitdrukking $g\,(df(v))$ zijn associatiehaken, d.w.z. brengen hier tot uitdrukking dat je eerst $df(v)$ evalueert en het resultaat—een functie dus—vermenigvuldigt met de functie g. Interpretatie als functiehaakjes voor het argument van g is strijdig met de definitie van het domein van g.)

(3) **d.** Welke noodzakelijke voorwaarde moet aan de functies $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ gesteld worden opdat er een functie $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ bestaat zodanig dat $g\, df = dh$?
(*Hint:* Evalueer deze vergelijking voor de twee elementen van $\mathscr{B}$. Differentieer de aldus verkregen vergelijkingen op een zodanige manier dat je de functie h kunt elimineren.)

Stel $g\, df = dh$, dus $g\, df(v) = dh(v)$, oftewel $g\, v(f) = v(h)$, voor alle $v \in V$. I.h.b. geldt dus als we voor v de basisvectoren $\partial/\partial x$ resp. $\partial/\partial y$ substitueren:

$$g\, \partial_x f = \partial_x h \quad \text{resp.} \quad g\, \partial_y f = \partial_y h .$$

Differentieer de eerste vergelijking naar y en de tweede naar x. Resultaat:

$$\partial_y g\, \partial_x f + g\, \partial_{xy} f = \partial_{xy} h \quad \text{resp.} \quad \partial_x g\, \partial_y f + g\, \partial_{xy} f = \partial_{xy} h .$$

Hieruit volgt door gelijkstelling van beide linkerleden:

$$\partial_y g \, \partial_x f = \partial_x g \, \partial_y f \, .$$

De functies f en g kunnen dus niet onafhankelijk gekozen worden, maar moeten voldoen aan deze restrictie. Een triviaal geval is de keuze $g(x, y) =$ constant. In het algemeen moet gelden $\nabla g(x, y) \parallel \nabla f(x, y)$ (merk op dat de nulvector parallel is aan elke vector). Men kan laten zien dat deze eis niet alleen noodzakelijk is, zoals hier bewezen, maar ook voldoende.

EINDE