## HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Deadline: donderdag 20 maart 2008.

**Lees dit vóórdat je begint!**

- Maak deze opdracht alleen of samen met maximaal één voor dit vak ingeschreven medestudent(e).
- Schrijf na(a)m(en) en studentnummer(s) op elk ingeleverde vel.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent.
- Over de details van de opdracht worden voor de inleverdatum geen *specifieke* vragen beantwoord. (Vragen van *algemene* aard zijn uiteraard ten allen tijde welkom!)
- Lever deze huiswerkopdracht in vóór het verstrijken van de aangegeven deadline bij de docent of een van de assistenten. Huiswerkopdrachten die later binnenkomen worden niet nagekeken.
- Deze opdracht levert maximaal één bonuspunt op, welk zal worden opgeteld bij het (her)tentamencijfer voor het vak 8D020 (alleen geldig in het academisch jaar 2007–2008).

*VEEL SUCCES!*

(**10**) **Opgave.** We construeren een lineaire ruimte van eerste orde partiële differentiaaloperatoren in $\mathbb{R}^2$ als volgt:

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Span} \mathscr{B} \quad \text{waarbij} \quad \mathscr{B} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}.$$

Hierin staat $\operatorname{Span} \mathscr{B}$ voor het opspansel gegenereerd door de elementen van de set $\mathscr{B}$. De elementen van $\operatorname{Span} \mathscr{B}$ zijn dus vectoren die opgevat kunnen worden als operatoren van het volgende type:

$$\frac{\partial}{\partial x} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : f \mapsto \frac{\partial f}{\partial y},$$

waarin $x$ en $y$ duiden op het eerste, respectievelijk tweede argument van de functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. We beschouwen gemakshalve alleen reëelwaardige functies en lineaire ruimten en afbeeldingen over het scalairlichaam $\mathbb{R}$.

**a.** Leg uit wat de definitie van $V$ inhoudt door de volgende vragen te beantwoorden.

(1) **a1.** Welke gedaante heeft een willekeurig element $v \in V$?

(2) **a2.** Wat wordt er precies bedoeld met “vectoroptelling” en “scalairvermenigvuldiging” op $V$ in termen van de gewone optelling en vermenigvuldiging van reële getallen?

(1) **a3.** Wat wordt er bedoeld met “de componenten van $v \in V$ ten opzichte van de basis $\mathscr{B}$”?

Met een gegeven functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ associëren we een afbeelding

$$df : V \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : v \mapsto df(v) \stackrel{\text{def}}{=} v(f).$$

(2) **b.** Bewijs dat $df \in \mathscr{L}(V, C^\infty(\mathbb{R}^2))$, d.w.z. bewijs dat $df$ een lineaire afbeelding is.

Voor gegeven functies $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ beschouwen we de afbeelding $\omega = g\,df \in \mathscr{L}(V, C^\infty(\mathbb{R}^2))$, waarbij we het product van $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ en $df \in \mathscr{L}(V, C^\infty(\mathbb{R}^2))$ als volgt definiëren in termen van het gebruikelijke functieproduct op $C^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$g\,df : V \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : v \mapsto g\,df(v)\,.$$

(Met $g\,df(v)$ bedoelen we $g\,(df(v))$; merk op dat $g$ en $df(v)$ functies in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ zijn.)

(1) **c.** Leg uit wat hier bedoeld wordt met het "gebruikelijke functieproduct op $C^\infty(\mathbb{R}^2)$".

(3) **d.** Welke noodzakelijke voorwaarde moet aan de functies $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ gesteld worden opdat er een functie $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ bestaat zodanig dat $g\,df = dh$?
(*Hint:* Evalueer deze vergelijking voor de twee elementen van $\mathscr{B}$. Differentieer de aldus verkregen vergelijkingen op een zodanige manier dat je de functie $h$ kunt elimineren.)

**EINDE**