HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl, **T** 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of met *maximaal* één zelf te kiezen (eveneens voor dit vak ingeschreven) partner.
- Schrijf je naam c.q. beide namen en studentnummer(s) op elk in te leveren vel.
- De uiterste inleverdatum is *woensdag 22 december 2004* (voorafgaand aan het werkcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken!
- Elke opgave wordt beloond met een cijfer tussen 0 en 1. Het gemiddelde cijfer voor alle opgaven is de bonus die zal worden opgeteld bij je tentamencijfer van 8 maart 2005, met dien verstande dat het eindcijfer niet hoger kan zijn dan tien.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Herhaal zonodig eerst grondig je eerstejaars wiskundevakken!

Opgave 1. Beschouw de volgende oneigenlijke integraal in n dimensies:

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)}\, dx_1 \dots dx_n \,.$$

$(\frac{1}{5})$ **a.** Herschrijf I_2 middels substitutie van variabelen in termen van poolcoördinaten:

$$\begin{cases} x_1 &= r\cos\phi \\ x_2 &= r\sin\phi\,. \end{cases}$$

$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\phi dr = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr$. De tweede stap volgt door substitutie van variabelen, met Jacobideterminant $\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{bmatrix}\right| = r$.

$(\frac{1}{5})$ **b.** Bereken I_2 met behulp van onderdeel a.

$I_2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,r\,d\phi dr = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$.

$(\frac{1}{5})$ **c.** Bereken I_1

We hebben $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = I_1^2$. Omdat $I_1 \geq 0$ geldt dus $I_1 = \sqrt{I_2} = \sqrt{\pi}$.

$(\frac{1}{5})$ **d.** Bereken I_n voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Analoog aan het vorige onderdeel volgt $I_n = I_1^n = \sqrt{I_2}^{\,n} = \sqrt{\pi}^{\,n}$.

Een variant op bovengenoemde integraal is de volgende, waarbij $\sigma \in \mathbb{R}^+$:

$$J_n(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^{\,n}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{2\sigma^2}}\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

($\frac{1}{5}$) **e.** Laat zien dat $J_n(\sigma)$ onafhankelijk is van zowel $\sigma \in \mathbb{R}^+$ als $n \in \mathbb{N}$ en bereken zijn waarde.

Substitueer $x_i = y_i\,\sigma\sqrt{2}$:

$$J_n(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^{\,n}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{2\sigma^2}}\, dx_1 \ldots dx_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}^{\,n}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y_1^2+\ldots+y_n^2)}\, dy_1 \ldots dy_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}^{\,n}}\, I_n = 1$$

ongeacht $\sigma \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}$. Merk op dat de Jacobideterminant in dit geval gelijk is aan $\left|\det \dfrac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}\right| = \left|\det \operatorname{diag}\{\sigma\sqrt{2},\ldots,\sigma\sqrt{2}\}\right| = \sqrt{2\sigma^2}^{\,n}$, waardoor de σ-afhankelijke normeringsfactor teniet wordt gedaan.

Opgave 2. Beschouw voor vast gekozen $a > 0$ de volgende functies:

$$f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_1 & \text{als} \quad |x| \le a \\ 0 & \text{in alle overige gevallen,} \end{cases}$$

$$f_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_2 & \text{als} \quad \sqrt{x^2+y^2} \le a \\ 0 & \text{in alle overige gevallen,} \end{cases}$$

$$f_3(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_3 & \text{als} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \le a \\ 0 & \text{in alle overige gevallen.} \end{cases}$$

($\frac{1}{3}$) **a1.** Vind een positieve reële constante c_1, uitgedrukt als functie van a, zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx = 1 \,.$$

$1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, dx = c_1 \int_{-a}^{a} dx = 2a\, c_1$. Conclusie: $c_1 = \dfrac{1}{2a}$. Merk op dat $2a$ de lengte is van het interval waarop f_1 niet-triviaal is.

($\frac{1}{3}$) **a2.** Vind een positieve reële constante c_2, uitgedrukt als functie van a, zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\, dxdy = 1 \,.$$

$1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\, dxdy = c_2 \int_0^a \int_0^{2\pi} r d\phi dr = 2\pi\, c_2 \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^a = \pi\, c_2\, a^2$. Conclusie: $c_2 = \dfrac{1}{\pi\, a^2}$. Merk op dat $\pi\, a^2$ de oppervlakte is van het gebied waarop f_2 niet-triviaal is.

($\frac{1}{3}$) **a3.** Vind een positieve reële constante c_3, uitgedrukt als functie van a, zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x,y,z)\, dxdydz = 1 \,.$$

$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x,y,z)\,dxdydz = c_3 \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = 2\pi\, c_3\, [-\cos\theta]_0^{\pi} \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi\, c_3\, a^3$. Conclusie: $c_3 = \dfrac{3}{4\pi\, a^3}$. Merk op dat $\frac{4}{3}\pi\, a^3$ het volume is van het gebied waarop f_3 niet-triviaal is.

Opgave 3. Beschouw de volgende matrices:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$(\frac{1}{10})$ **a1.** Bereken de eigenvectoren en bijbehorende eigenwaarden van A.

De eigenwaardenvergelijking luidt

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\lambda\,(\lambda-1)^2 .$$

Bij de tweede stap is de determinant ontwikkeld naar de eerste kolom. De eigenwaarden zijn dus respectievelijk $\lambda = 0$ (multipliciteit 1) en $\lambda = 1$ (multipliciteit 2). Voor de eigenvectoren $\xi \in \mathbb{R}^3$ moeten we alle onafhankelijke oplossingen vinden voor de eigenvectorvergelijkingen $A\xi = \lambda\xi$ voor $\lambda = 0$, respectievelijk $\lambda = 1$. Stel $\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. In termen van de coördinaten x, y, z luiden de twee stelsels dan als volgt. Voor $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \quad\ \ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \ \ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

en voor $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} \quad\ \ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \ \ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \ \ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

Deze stelsels zijn equivalent met de volgende, onderbepaalde stelsels vergelijkingen in $\mathbb{R}^3$. Voor $\lambda = 0$: $2x + y + z = 0$ en $y - z = 0$, en voor $\lambda = 1$: $y + z = 0$. Algemene oplossingen zijn respectievelijk

$$\xi_0^A : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{met } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (bij } \lambda = 0\text{)},$$

respectievelijk

$$\xi_1^A : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{met } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (bij } \lambda = 1\text{)}.$$

(Andere parametervoorstellingen zijn mogelijk. Het superscript refereert aan de betreffende matrix.) De eerste is de parametervoorstelling van een lijn, de tweede van een vlak door de oorsprong. De richtingsvectoren kunnen als onafhankelijke eigenvectoren dienen. (Roep in herinnering dat een eigenvector per definitie niet de nulvector kan zijn.)

$(\frac{1}{10})$ **a2.** Idem voor B.

De eigenwaardenvergelijking luidt

$$0 = \det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left(\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\lambda\,(\lambda-1)^2 .$$

De eigenwaarden zijn dus dezelfde als voorheen. Voor $\lambda = 0$ vinden we nu:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \quad\ \ \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \ \ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

en voor $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ -\frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ -\frac{1}{2}y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array}\right.$$

Oftewel, voor $\lambda = 0$: $x = 0$ en $y - z = 0$, en voor $\lambda = 1$: $y + z = 0$. Algemene oplossingen zijn respectievelijk

$$\xi_0^B : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{met } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (bij } \lambda = 0),$$

respectievelijk

$$\xi_1^B : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{met } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ (bij } \lambda = 1).$$

(Andere parametervoorstellingen zijn mogelijk.) De richtingsvectoren kunnen wederom als onafhankelijke eigenvectoren dienen.

$(\frac{1}{10})$ **b1.** Bepaal nulruimte $N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ en beeldruimte $R(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ van A.

Dit zijn precies de eigenruimten van A: $N(A) = \xi_0^A$, respectievelijk $R(A) = \xi_1^A$.

$(\frac{1}{10})$ **b2.** Idem voor B.

Dit zijn precies de eigenruimten van B: $N(B) = \xi_0^B$, respectievelijk $R(B) = \xi_1^B$.

$(\frac{1}{10})$ **c1.** Toon aan dat A een projectie is, dat wil zeggen laat zien dat $A^2 = A$.

Dit volgt door matrixvermenigvuldiging:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = A\,.$$

$(\frac{1}{10})$ **c2.** Idem voor B.

Dit volgt door matrixvermenigvuldiging:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = B\,.$$

$(\frac{1}{10})$ **d1.** Wat is de projectie-as waarlangs en het projectievlak waarop geprojecteerd wordt in geval van afbeeldingsmatrix A?

Projectie-as: ξ_0^A. Projectievlak: ξ_1^A.

$(\frac{1}{10})$ **d2.** Idem voor B.

Projectie-as: ξ_0^B. Projectievlak: ξ_1^B.

$(\frac{1}{5})$ **e.** Beargumenteer dat B een orthogonale projectie is, maar A niet.

(*Hint:* Je kunt een meetkundig argument gebruiken, of gebruik maken van het feit dat $A^T \neq A$, $B^T = B$, d.w.z. A is niet-symmetrisch, B wel.)

$\xi_0^B \perp \xi_1^B$ ("loodrechte projectie"). Dit geldt niet voor de projectie met matrix A ("scheve projectie").

Opgave 4. Onderstaand plaatje bestaat uit 4×4 beeldelementjes. Een beeldelementje kan vijf verschillende waarden aannemen, symbolisch aangeduid met de labels a, b, c, d, e.

a	b	e	c
e	e	d	d
e	c	e	e
e	c	e	a

In bovenstaand plaatje zijn er dus twee beeldelementjes met label a, één met label b, drie met label c, twee met label d en acht met label e. Dit is weergegeven in onderstaande tabel, het zogenaamde histogram van het gegeven plaatje. Merk op dat $2 + 1 + 3 + 2 + 8 = 16$, d.i. het totaal aantal beeldelementjes.

label	a	b	c	d	e
aantal	2	1	3	2	8

$(\frac{1}{4})$ **a.** Hoeveel verschillende 4×4 plaatjes kun je maken als je elk beeldelementje mag voorzien van een willekeurig label uit de set {a,b,c,d,e}?

Voor elk van de 16 beeldelementjes kun je onafhankelijk één van de vijf mogelijke labels kiezen. In totaal zijn er dus $5^{16} = 152.587.890.625$ verschillende 4×4 plaatjes te vormen.

$(\frac{1}{4})$ **b.** Hoeveel verschillende 4×4 plaatjes kun je maken met hetzelfde histogram als het gegeven plaatje?

Neem twee a's, één b, drie c's, twee d's en acht e's en ken ze achtereenvolgens toe aan een open vlakje in een 4×4 veld. Ongeacht in welke volgorde je dit doet zijn er voor de eerste 16 open posities waaruit je kunt kiezen, voor de tweede 15, enzovoort. In totaal kun je zo dus 16! keuzen maken. Echter niet alle keuzen leiden tot verschillende configuraties. Uitgaande van een willekeurige configuratie consistent met het gegeven histogram kun je alle identieke labels onderling van plaats verwisselen zonder dat dit tot een onderscheidbare configuratie leidt. We moeten dus delen door het aantal verwisselingen onder identieke labels, d.i. door 2!1!3!2!8!. Conclusie: Er zijn $\frac{16!}{2!1!3!2!8!} = 21.621.600$ plaatjes met hetzelfde histogram als het bovenstaande plaatje.

Opmerking: Het verband tussen voorgaande onderdelen kun je als volgt inzien. Je kunt alle 4×4 plaatjes die opgebouwd zijn uit beeldelementjes die vijf verschillende waarden kunnen aannemen opdelen in categoriën die gekarakteriseerd worden door een uniek histogram. Stel er zijn i_a beeldelementjes met label a, i_b met label b, i_c met label c, i_d met label d en (dus) $i_e = 16 - (i_a + i_b + i_c + i_d)$ met label e, waarbij $0 \leq i_a, i_b, i_c, i_d, i_e \leq 16$. Voor vaste waarden van i_a, i_b, i_c, i_d, i_e vormen deze dus een categorie. Deze categorie telt $\dfrac{16!}{i_a! i_b! i_c! i_d! i_e!}$ verschillende beelden met hetzelfde, unieke histogram. Sommatie over alle mogelijke histogrammen geeft

$$\sum_{i_a, i_b, i_c, i_d, i_e = 0, i_a + i_b + i_c + i_d + i_e = 16}^{16} \frac{16!}{i_a! i_b! i_c! i_d! i_e!} = 5^{16} ,$$

waarbij de sommatie uitsluitend loopt over indexcombinaties waarvoor $i_a + i_b + i_c + i_d + i_e = 16$. Dat deze som is inderdaad gelijk is aan 5^{16} volgt uit de observatie

$$(p + q + r + s + t)^N = \sum_{i_a, i_b, i_c, i_d, i_e = 0, i_a + i_b + i_c + i_d + i_e = N}^{N} \frac{N!}{i_a! i_b! i_c! i_d! i_e!} p^{i_a} q^{i_b} r^{i_c} s^{i_d} t^{i_e} ,$$

met $p = q = r = s = t = 1$ en $N = 16$, een generalisatie van het binomium van Newton.

$(\frac{1}{4})$ **c.** Wat is de kans dat een aselecte keuze van een plaatje uit de verzameling van alle plaatjes (onderdeel a) precies het gegeven plaatje oplevert?

$p = 5^{-16} = \dfrac{1}{152.587.890.625} \approx 6,5536\, 10^{-12}$, zie onderdeel a.

$(\frac{1}{4})$ **d.** Wat is de kans dat een aselecte keuze van een plaatje uit de verzameling van alle plaatjes (onderdeel a) een plaatje oplevert met hetzelfde histogram als dat van het gegeven plaatje?

Er zijn $\dfrac{16!}{2!1!3!2!8!} = 21.621.600$ plaatjes met hetzelfde histogram als het bovenstaande plaatje, zie onderdeel b. Elk is a priori even waarschijnlijk, met kans $p = 5^{-16} = \dfrac{1}{152.587.890.625}$, zie onderdeel c. De kans dat een aselecte keuze een plaatje oplevert met hetzelfde histogram als dat van het gegeven plaatje bedraagt dus $5^{-16} \dfrac{16!}{2!1!3!2!8!} = \dfrac{21.621.600}{152.587.890.625} = \dfrac{864.864}{6103515625} \approx 1,41699\, 10^{-4}$.

EINDE