HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl,
T 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of met *maximaal* één zelf te kiezen (eveneens voor dit vak ingeschreven) partner.
- Schrijf je naam c.q. beide namen en studentnummer(s) op elk in te leveren vel.
- De uiterste inleverdatum is *woensdag 22 december 2004* (voorafgaand aan het werkcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken!
- Elke opgave wordt beloond met een cijfer tussen 0 en 1. Het gemiddelde cijfer voor alle opgaven is de bonus die zal worden opgeteld bij je tentamencijfer van 8 maart 2005, met dien verstande dat het eindcijfer niet hoger kan zijn dan tien.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Herhaal zonodig eerst grondig je eerstejaars wiskundevakken!

Opgave 1. Beschouw de volgende oneigenlijke integraal in n dimensies:

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

($\frac{1}{5}$) **a.** Herschrijf I_2 middels substitutie van variabelen in termen van poolcoördinaten:

$$\begin{cases} x_1 &= r\cos\phi \\ x_2 &= r\sin\phi \,. \end{cases}$$

($\frac{1}{5}$) **b.** Bereken I_2 met behulp van onderdeel a.

($\frac{1}{5}$) **c.** Bereken I_1

($\frac{1}{5}$) **d.** Bereken I_n voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Een variant op bovengenoemde integraal is de volgende, waarbij $\sigma \in \mathbb{R}^+$:

$$J_n(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^{\,n}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{2\sigma^2}}\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

($\frac{1}{5}$) **e.** Laat zien dat $J_n(\sigma)$ onafhankelijk is van zowel $\sigma \in \mathbb{R}^+$ als $n \in \mathbb{N}$ en bereken zijn waarde.

Opgave 2. Beschouw voor vast gekozen $a > 0$ de volgende functies:

$$f_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_1 & \text{als} \quad |x| \leq a \\ 0 & \text{in alle overige gevallen,} \end{cases}$$

$$f_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_2 & \text{als} \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq a \\ 0 & \text{in alle overige gevallen,} \end{cases}$$

$$f_3(x,y,z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} c_3 & \text{als} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq a \\ 0 & \text{in alle overige gevallen.} \end{cases}$$

$(\frac{1}{3})$ **a1.** Vind een positieve reële constante c_1, uitgedrukt als functie van a, zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1\,.$$

$(\frac{1}{3})$ **a2.** Vind een positieve reële constante c_2, uitgedrukt als functie van a, zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\,dxdy = 1\,.$$

$(\frac{1}{3})$ **a3.** Vind een positieve reële constante c_3, uitgedrukt als functie van a, zodanig dat

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_3(x,y,z)\,dxdydz = 1\,.$$

Opgave 3. Beschouw de volgende matrices:

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$(\frac{1}{10})$ **a1.** Bereken de eigenvectoren en bijbehorende eigenwaarden van A.

$(\frac{1}{10})$ **a2.** Idem voor B.

$(\frac{1}{10})$ **b1.** Bepaal nulruimte $N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ en beeldruimte $R(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{Ax \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ van A.

$(\frac{1}{10})$ **b2.** Idem voor B.

$(\frac{1}{10})$ **c1.** Toon aan dat A een projectie is, dat wil zeggen laat zien dat $A^2 = A$.

$(\frac{1}{10})$ **c2.** Idem voor B.

$(\frac{1}{10})$ **d1.** Wat is de projectie-as waarlangs en het projectievlak waarop geprojecteerd wordt in geval van afbeeldingsmatrix A?

$(\frac{1}{10})$ **d2.** Idem voor B.

$(\frac{1}{5})$ **e.** Beargumenteer dat B een orthogonale projectie is, maar A niet.
(*Hint:* Je kunt een meetkundig argument gebruiken, of gebruik maken van het feit dat $A^T \neq A$, $B^T = B$, d.w.z. A is niet-symmetrisch, B wel.)

Opgave 4. Onderstaand plaatje bestaat uit 4×4 beeldelementjes. Een beeldelementje kan vijf verschillende waarden aannemen, symbolisch aangeduid met de labels a, b, c, d, e.

a	b	e	c
e	e	d	d
e	c	e	e
e	c	e	a

In bovenstaand plaatje zijn er dus twee beeldelementjes met label a, één met label b, drie met label c, twee met label d en acht met label e. Dit is weergegeven in onderstaande tabel, het zogenaamde histogram van het gegeven plaatje. Merk op dat $2 + 1 + 3 + 2 + 8 = 16$, d.i. het totaal aantal beeldelementjes.

label	a	b	c	d	e
aantal	2	1	3	2	8

$(\frac{1}{4})$ **a.** Hoeveel verschillende 4×4 plaatjes kun je maken als je elk beeldelementje mag voorzien van een willekeurig label uit de set $\{$a,b,c,d,e$\}$?

$(\frac{1}{4})$ **b.** Hoeveel verschillende 4×4 plaatjes kun je maken met hetzelfde histogram als het gegeven plaatje?

$(\frac{1}{4})$ **c.** Wat is de kans dat een aselecte keuze van een plaatje uit de verzameling van alle plaatjes (onderdeel a) precies het gegeven plaatje oplevert?

$(\frac{1}{4})$ **d.** Wat is de kans dat een aselecte keuze van een plaatje uit de verzameling van alle plaatjes (onderdeel a) een plaatje oplevert met hetzelfde histogram als dat van het gegeven plaatje?

EINDE