HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl, **T** 040 2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of met *maximaal* één zelf te kiezen (eveneens voor dit vak ingeschreven) partner.
- Schrijf je naam c.q. beide namen en studentnummer(s) op elk in te leveren vel.
- De uiterste inleverdatum is *woensdag 23 februari 2005* (voorafgaand aan het werkcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken!
- Elke opgave wordt beloond met een cijfer tussen 0 en 1. Het gemiddelde cijfer voor alle opgaven is de bonus die zal worden opgeteld bij je tentamencijfer van 8 maart 2005, met dien verstande dat het eindcijfer niet hoger kan zijn dan tien.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe. Herhaal zonodig eerst grondig je eerstejaars wiskundevakken!

Opgave 1. In deze opgave beschouwen we de verzameling $\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^4$ voorzien van de nodige structuur. Een element $x \in \mathbb{H}$ identificeren we met een unieke kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^4$, als volgt:

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{waarbij } x_i \in \mathbb{R} \text{ voor elke } i = 0,1,2,3 \text{ (de “componenten van } x\text{”).}$$

Om te beginnen interpreteren we $\mathbb{H}$ als lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ door, op de gebruikelijke manier, vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in te voeren. We duiden de vectorsom van $x, y \in \mathbb{H}$ aan met $x + y$ en het scalaire veelvoud van $x \in \mathbb{H}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda\, x$.

$(\frac{1}{10})$ **a.** Leg uit wat er bedoeld wordt met “op de gebruikelijke manier” door expliciet aan te geven hoe $x + y$ en $\lambda\, x$ gedefinieerd zijn in termen van hun componenten.

Vervolgens voeren we op $\mathbb{H}$ het standaard reëelwaardige inprodukt in. Voor $x, y \in \mathbb{H}$ duiden we dit aan met $\langle x|y\rangle \in \mathbb{R}$.

$(\frac{1}{10})$ **b.** Geef de definitie van $\langle x|y\rangle$ in termen van de componenten van x en y.

Tenslotte voeren we een algebraïsche operatie in, welke we aanduiden als “vermenigvuldiging”. Het “produkt” van $x, y \in \mathbb{H}$ noteren we kortweg als $x\, y$, waarbij we afspreken dat, in termen van componenten,

$$x\, y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_0\, y_0 - x_1\, y_1 - x_2\, y_2 - x_3\, y_3 \\ x_0\, y_1 + x_1\, y_0 + x_2\, y_3 - x_3\, y_2 \\ x_0\, y_2 + x_2\, y_0 + x_3\, y_1 - x_1\, y_3 \\ x_0\, y_3 + x_3\, y_0 + x_1\, y_2 - x_2\, y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}\,.$$

($\frac{1}{4}$) **c.** Bewijs dat $\mathbb{H}$, voorzien van bovenstaande vermenigvuldigingsoperatie, een algebra vormt. Ga als volgt te werk (we nemen voortaan aan dat $\mathbb{H}$ een lineaire ruimte is, zie onderdeel a):

c1. Bewijs dat $\forall\, x, y, z \in \mathbb{H} \quad (x\, y)\, z = x\, (y\, z)$.

c2. Bewijs dat $\forall\, x, y, z \in \mathbb{H} \quad x\, (y + z) = (x\, y) + (x\, z)$.

c3. Bewijs dat $\forall\, x, y, z \in \mathbb{H} \quad (x + y)\, z = (x\, z) + (y\, z)$.

c4. Bewijs dat $\forall\, x, y \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(x\, y) = (\lambda\, x)\, y = x\, (\lambda\, y)$.

($\frac{1}{10}$) **d.** Laat zien dat er bovendien een eenheidselement $1 \in \mathbb{H}$ bestaat (niet te verwarren met het getal $1 \in \mathbb{R}$) en geef zijn kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^4$.

($\frac{1}{10}$) **e.** Is vermenigvuldiging op $\mathbb{H}$ commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

We beschouwen nu de deelverzameling $\mathbb{H}_1 \subset \mathbb{H}$, gedefinieerd door $\mathbb{H}_1 = \{x \in \mathbb{H} \mid \langle x|x \rangle = 1\}$.

($\frac{1}{4}$) **f.** Bewijs dat $\mathbb{H}_1$ een groep vormt ten aanzien van de vermenigvuldiging. Ga als volgt te werk:

f1. Laat zien dat als $x, y \in \mathbb{H}_1$ volgt $x\, y \in \mathbb{H}_1$ ("geslotenheid").

f2. Bewijs dat $\forall\, x, y, z \in \mathbb{H}_1 \quad (x\, y)\, z = x\, (y\, z)$ ("associativiteit").

f3. Laat zien dat voor het eenheidselement uit onderdeel d geldt $1 \in \mathbb{H}_1$.

f4. Laat zien dat voor gegeven $x \in \mathbb{H}_1$ er een inverse $x^{-1} \in \mathbb{H}_1$ bestaat, zodanig dat $x\, x^{-1} = x^{-1}\, x = 1 \in \mathbb{H}_1$. Geef wederom de kolomrepresentatie van x^{-1} in $\mathbb{R}^4$ in termen van de componenten van x.

($\frac{1}{10}$) **g.** Gegeven vaste $x \in \mathbb{H}$. Geef een karakterisatie van de grootste deelverzameling $\mathbb{H}^{\mathrm{c}}_x \subset \mathbb{H}$ waarvoor geldt $x\, y = y\, x \;\forall\, y \in \mathbb{H}^{\mathrm{c}}_x$.

EINDE