HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl, **T** 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak deze opgave alleen of in zelf te vormen *groepjes van maximaal vier studenten.* De omvang van de groep is van invloed op de strengheid van beoordeling.
- Schrijf ieders naam en studentnummer op elk ingeleverde vel.
- De uiterste inleverdatum is *dinsdag 27 januari 2004* (voorafgaand aan of na afloop van het hoorcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken.
- Correct ingeleverde uitwerkingen worden beloond met een cijfer tussen 0.0 en 1.0. Dit levert een deelcijfer dat deel zal uitmaken van je tentamencijfer van 26 mei 2004 of je hertentamencijfer van 8 juli 2004. Het resultaat van deze opgave zal je eindcijfer niet negatief beïnvloeden.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe.

Opgave. Definieer de verzameling

$$U = \{u \in C^\infty([0,1] \times [0,1]) \mid u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \; \forall x, y \in [0,1]\} ,$$

van gladde, reëelwaardige beelden in twee dimensies met gegeven randvoorwaarden.

(0.5) **a.** Bewijs dat U een lineaire ruimte vormt. Geef daartoe aan wat vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in U betekenen en laat zien dat hiermee aan alle criteria van Definitie 9, § 1.6, is voldaan.

Wat moet je doen? Je moet

- uitleggen wat een "lineaire combinatie" is, d.w.z. vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging definiëren,
- laten zien dat zo'n lineaire combinatie inderdaad in U zit, m.a.w. willekeurig vaak differentieerbaar is en aan de gestelde randvoorwaarden voldoet en
- verifiëren dat aan alle voorschriften van een vectorruimte is voldaan (Definitie 9).

Om onderscheid te maken tussen vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging aan de ene kant en gewone optelling en vermenigvuldiging aan de andere kant gebruik ik voor de eerstgenoemde operatoren $\oplus$ respectievelijk $\odot$. Let goed op het gebruik hiervan!

Vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging: Als $f, g \in U$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dan geldt per definitie dat $(\lambda \odot f \oplus \mu \odot g)(x,y) = \lambda\, f(x,y) + \mu\, g(x,y)$. Door i.p.v. (x,y) achtereenvolgens de vier punten $(x,0)$, $(x,1)$, $(0,y)$ en $(1,y)$ in te vullen volgt hier tevens uit dat functie $\lambda \odot f \oplus \mu \odot g$ de gegeven randvoorwaarden van f en g erft. Verder geldt per definitie voor een willekeurige partiële afgeleide

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}(\lambda \odot f \oplus \mu \odot g) = \lambda \odot \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f \oplus \mu \odot \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} g\,,$$

d.w.z. differentiëren is per definitie een lineaire afbeelding, dus differentieerbaarheid is eveneens manifest. Conclusie: $\lambda \odot f \oplus \mu \odot g \in U$.

Definitie 9, § 1.6: Zij $f, g, h \in U$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ willekeurig. Dan geldt:

- $((f \oplus g) \oplus h)(x,y) = (f \oplus g)(x,y) + h(x,y) = (f(x,y) + g(x,y)) + h(x,y) = f(x,y) + (g(x,y) + h(x,y)) = f(x,y) + (g \oplus h)(x,y) = (f \oplus (g \oplus h))(x,y)$, ergo $(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)$.
- De nulfunctie gedefinieerd door $n(x,y) = 0$ voor alle $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ is glad (d.w.z. willekeurig vaak differentieerbaar) en voldoet aan de gestelde randvoorwaarden, dus $n \in U$. Hiervoor geldt bovendien $(n \oplus f)(x,y) = n(x,y) + f(x,y) = f(x,y)$ en dus $n \oplus f = f$.
- De functie $(-f)$ gedefinieerd door $(-f)(x,y) = -f(x,y)$ voor alle $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ is glad en voldoet aan de gestelde randvoorwaarden, dus $-f \in U$. (Alternatief argument: $-f = -1 \odot f$, dus $-f \in U$, want hierboven is al bewezen dat U gesloten is onder lineaire combinaties.) Hiervoor geldt bovendien $(f \oplus (-f))(x,y) = f(x,y) + (-f)(x,y) = f(x,y) - f(x,y) = 0 = n(x,y)$ en dus $f \oplus (-f) = n$.
- $(f \oplus g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = g(x,y) + f(x,y) = (g \oplus f)(x,y)$, dus $f \oplus g = g \oplus f$, een rechtstreeks gevolg dus van commutativiteit van de gewone optelling.
- $(\lambda \odot (f \oplus g))(x,y) = \lambda\,(f \oplus g)(x,y) = \lambda\,(f(x,y) + g(x,y)) = \lambda\,f(x,y) + \lambda\,g(x,y) = (\lambda \odot f)(x,y) + (\lambda \odot g)(x,y) = (\lambda \odot f \oplus \lambda \odot g)(x,y)$, oftewel $\lambda \odot (f \oplus g) = \lambda \odot f \oplus \lambda \odot g$.
- $((\lambda + \mu) \odot f)(x,y) = (\lambda + \mu)\,f(x,y) = \lambda\,f(x,y) + \mu\,f(x,y) = (\lambda \odot f)(x,y) + (\mu \odot f)(x,y) = (\lambda \odot f \oplus \mu \odot f)(x,y)$, dus $(\lambda + \mu) \odot f = \lambda \odot f \oplus \mu \odot f$.
- $((\lambda\mu) \odot f)(x,y) = (\lambda\mu)\,f(x,y) = \lambda\,(\mu\,f(x,y)) = \lambda\,((\mu \odot f)(x,y)) = (\lambda \odot (\mu \odot f))(x,y)$, derhalve $(\lambda\mu) \odot f = \lambda \odot (\mu \odot f)$.
- $(1 \odot f)(x,y) = 1\,f(x,y) = f(x,y)$, dus $1 \odot f = f$.

Definieer voorts de verzameling

$$\Theta = \left\{ T \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; T'(u) \neq 0 \;\forall u \in \mathbb{R} \right\} ,$$

van alle monotone grijswaardenafbeeldingen. Deze verzameling voorzien we van een interne binaire operator $\circ$, als volgt: Als $T_1, T_2 \in \Theta$, dan is $T_1 \circ T_2 \in \Theta$ die grijswaardenafbeelding waarvoor geldt $(T_1 \circ T_2)(u) = T_1(T_2(u))$ voor alle $u \in \mathbb{R}$.

☞ **Correctie**: We moeten Θ verder beperken tot bijectieve afbeeldingen op $\mathbb{R}$. Een correcte definitie is de volgende:

$$\Theta = \{ T \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid T'(u) \neq 0 \;\forall u \in \mathbb{R} \text{ en } \operatorname{Im} T = \mathbb{R} \} ,$$

Met $\operatorname{Im} T$ ("image") wordt bedoeld het functiebereik $\{T(u) \mid u \in \mathbb{R}\}$. Merk op dat het domein van T^{inv} gelijk is aan het bereik van T. Deze definitie garandeert dus dat indien bij gegeven $T \in \Theta$ de functie T^{inv} bestaat deze hetzelfde domein heeft als T, zoals vereist. Deze aanpassing heeft enkel consequenties voor de inverteerbaarheidseigenschap en de eventuele keuze van functies in het tegenvoorbeeld van commutativiteit. ■

(0.5) **b.** Bewijs dat Θ een niet-commutatieve groep vormt ten aanzien van de operator $\circ$. Toon daarbij allereerst aan dat Θ "gesloten" is in de zin dat als $T_1, T_2 \in \Theta$, volgt dat $T_1 \circ T_2 \in \Theta$. Laat vervolgens zien dat daarmee aan alle criteria van Definitie 2, § 1.4, is voldaan en geef een tegenvoorbeeld bij de eigenschap van commutativiteit.

Als $T_1, T_2 \in \Theta$, dan volgt met de kettingregel dat $(T_1 \circ T_2)'(u) = T_1'(T_2(u))\,T_2'(u) \neq 0$ voor alle $u \in \mathbb{R}$. Bovendien volgt door herhaald toepassen van kettingregel en produktregel dat $T_1 \circ T_2$ willekeurig vaak differentieerbaar is als T_1 en T_2 dat zijn. Tenslotte geldt voor het bereik van een samengestelde functie dat $\operatorname{Im}(T_1 \circ T_2) = \mathbb{R}$. Dus geldt kennelijk $T_1 \circ T_2 \in \Theta$.

We moeten voorts controleren of Θ voorzien van de samenstellingsoperator $\circ$ een groep vormt volgens Definitie 2, § 1.4: Kies $S, T, U \in \Theta$ willekeurig, evenals $u \in \mathbb{R}$.

- Associativiteit: $((S\circ T)\circ U)(u) = (S\circ T)(U(u)) = S(T(U(u))) = S((T\circ U)(u)) = (S\circ(T\circ U))(u)$, dus $(S\circ T)\circ U = S\circ(T\circ U)$.

- Definieer $E\in\Theta$ als de afbeelding met functievoorschrift $E(u)=u$. Deze is inderdaad glad, d.w.z. $E\in C^\infty(\mathbb{R})$ (met $E'(u)=1$ en $E^{(k)}(u)=0$ voor $k>1$), monotoon, aangezien $E'(u)=1\neq 0$ voor alle $u\in\mathbb{R}$, en bijectief, aangezien $\operatorname{Im}E=\mathbb{R}$. Er geldt $(T\circ E)(u)=T(E(u))=T(u)$, dus $T\circ E=T$. Analoog volgt $(E\circ T)(u)=E(T(u))=T(u)$, dus $E\circ T=T$.

- Een heuristisch argument volstaat hier: Bij gegeven $T\in\Theta$ hoort een monotoon stijgende of dalende grafiek, $\operatorname{graf}T=\{(u,v)\,|\,v=T(u)\}$. Door deze grafiek te spiegelen in de lijn $l: v=u$ vind je de grafiek van T^{inv}, $\operatorname{graf}T^{\mathrm{inv}}=\{(v,u)\,|\,v=T(u)\}=\{(v,u)\,|\,u=T^{\mathrm{inv}}(v)\}$. Omdat $\operatorname{graf}T$ nergens een horizontale raaklijn heeft (stricte monotonie) heeft $\operatorname{graf}T^{\mathrm{inv}}$ nergens een verticale raaklijn, m.a.w. de afgeleide van T^{inv} is overal goed gedefinieerd. Uit de relatie $T^{\mathrm{inv}}(T(u))=E(u)=u$—of $T(T^{\mathrm{inv}}(v)=E(v)=v$—volgt overigens door differentiëren, gebruik makend van de kettingregel:

$$1=\frac{d}{du}T^{\mathrm{inv}}(T(u))=\frac{dT^{\mathrm{inv}}}{dv}(v=T(u))\,\frac{dT(u)}{du}\quad\text{resp.}\quad 1=\frac{d}{dv}T(T^{\mathrm{inv}}(v))=\frac{dT}{du}(u=T^{\mathrm{inv}}(v))\,\frac{dT^{\mathrm{inv}}(v)}{dv}\,.$$

  Dus
$$\frac{dT^{\mathrm{inv}}}{dv}(v=T(u))=\left(\frac{dT(u)}{du}\right)^{-1}\neq 0\quad\text{resp.}\quad\frac{dT^{\mathrm{inv}}(v)}{dv}=\left(\frac{dT}{du}(u=T^{\mathrm{inv}}(v))\right)^{-1}\neq 0\,.$$

  Dit kun je weer willekeurig vaak differentiëren middels kettingregel en produktregel. Tenslotte geldt dat $\operatorname{Im}T^{\mathrm{inv}}=\operatorname{Dom}T$, het domein van T, d.i. $\mathbb{R}$. kortom $T^{\mathrm{inv}}\in\Theta$.

De groep Θ is niet commutatief. Voorbeeld, uitgaande van de aangepaste definitie: $S(u)=u+\frac{1}{3}u^3$, $T(u)=u+\frac{1}{5}u^5$, maar $S\circ T\neq T\circ S$, want $(S\circ T)(u)=u+\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}(u+\frac{1}{5}u^5)^3\neq u+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}(u+\frac{1}{3}u^3)^5=(T\circ S)(u)$. Merk op dat S en T glad zijn, dat $S'(u)=1+u^2>0$ en $T'(u)=1+u^4>0$ voor alle $u\in\mathbb{R}$ en dat $\operatorname{Im}S=\operatorname{Im}T=\mathbb{R}$, dus inderdaad geldt $S,T\in\Theta$.

EINDE