# HUISWERKOPGAVE WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Docent: Dr L.M.J. Florack, WH 3.108 (secretariaat WH 2.106), **E** L.M.J.Florack@tue.nl, **T** 040-2475377, **F** 040 2472740, **W** www.bmi2.bmt.tue.nl/image-analysis/people/lflorack

**Lees dit vóórdat je begint!**

- Maak deze opgave alleen of in zelf te vormen *groepjes van maximaal vier studenten*. De omvang van de groep is van invloed op de strengheid van beoordeling.
- Schrijf ieders naam en studentnummer op elk ingeleverde vel.
- De uiterste inleverdatum is *dinsdag 27 januari 2004* (voorafgaand aan of na afloop van het hoorcollege). Uitwerkingen die later worden aangeboden worden niet nagekeken.
- Correct ingeleverde uitwerkingen worden beloond met een cijfer tussen 0.0 en 1.0. Dit levert een deelcijfer dat deel zal uitmaken van je tentamencijfer van 26 mei 2004 of je hertentamencijfer van 8 juli 2004. Het resultaat van deze opgave zal je eindcijfer niet negatief beïnvloeden.
- Werk je argumenten helder uit en schrijf duidelijk. Onleesbare of slordige formuleringen leveren geen punten op. Licht conceptuele stappen in je bewijsvoering waar nodig toe.

**Opgave.** Definieer de verzameling

$$U = \{u \in C^\infty([0,1] \times [0,1]) \mid u(x,0) = u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \;\forall x, y \in [0,1]\} ,$$

van gladde, reëelwaardige beelden in twee dimensies met gegeven randvoorwaarden.

(0.5) **a.** Bewijs dat $U$ een lineaire ruimte vormt. Geef daartoe aan wat vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in $U$ betekenen en laat zien dat hiermee aan alle criteria van Definitie 9, § 1.6, is voldaan.

Definieer voorts de verzameling

$$\Theta = \left\{T \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; T'(u) \neq 0 \;\forall u \in \mathbb{R}\right\} ,$$

van alle monotone grijswaardenafbeeldingen. Deze verzameling voorzien we van een interne binaire operator $\circ$, als volgt: Als $T_1, T_2 \in \Theta$, dan is $T_1 \circ T_2 \in \Theta$ die grijswaardenafbeelding waarvoor geldt $(T_1 \circ T_2)(u) = T_1(T_2(u))$ voor alle $u \in \mathbb{R}$.

(0.5) **b.** Bewijs dat $\Theta$ een niet-commutatieve groep vormt ten aanzien van de operator $\circ$. Toon daarbij allereerst aan dat $\Theta$ "gesloten" is in de zin dat als $T_1, T_2 \in \Theta$, volgt dat $T_1 \circ T_2 \in \Theta$. Laat vervolgens zien dat daarmee aan alle criteria van Definitie 2, § 1.4, is voldaan en geef een tegenvoorbeeld bij de eigenschap van commutativiteit.

**EINDE**