TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Dinsdag 8 maart 2005. Tijd: 17.30–20.30 uur. Plaats: AUD 6,7,8.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.** In deze opgave beschouwen we de verzameling $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2$ voorzien van een aantal interne en externe operatoren. Een element $\theta \in \mathcal{G}$ identificeren we met zijn kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^2$:

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{waarbij } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \text{ (de “componenten van } \theta\text{”).}$$

Om te beginnen interpreteren we $\mathcal{G}$ als lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ door, op de gebruikelijke manier, vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in te voeren. We duiden de vectorsom van $\eta, \theta \in \mathcal{G}$ aan met $\eta + \theta$ en het scalaire veelvoud van $\theta \in \mathcal{G}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda\,\theta$.

(5) **a.** Leg uit wat er bedoeld wordt met “de gebruikelijke manier” door expliciet aan te geven hoe $\eta + \theta$ en $\lambda\,\theta$ gedefinieerd zijn in termen van hun componenten.

Voor willekeurige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\eta, \theta \in \mathcal{G}$ definiëren we

$$\lambda\,\eta + \mu\,\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda\,\eta_1 + \mu\,\theta_1 \\ \lambda\,\eta_2 + \mu\,\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Verder voeren we een algebraïsche operatie in, welke we aanduiden als “vermenigvuldiging”. Het “produkt” van $\eta, \theta \in \mathcal{G}$ noteren we kortweg als $\eta\,\theta$, waarbij we afspreken dat, in termen van componenten,

$$\eta\,\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \eta_1\,\theta_1 \\ \eta_1\,\theta_2 + \eta_2\,\theta_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}.$$

(5) **b.** Bewijs dat $\mathcal{G}$, voorzien van bovenstaande vermenigvuldigingsoperatie, een algebra vormt. Ga als volgt te werk (we nemen zonder verder bewijs aan dat $\mathcal{G}$ een lineaire ruimte is, zie onderdeel a):

b1. Bewijs dat $\forall\, \eta, \theta, \gamma \in \mathcal{G} \quad (\eta\,\theta)\,\gamma = \eta\,(\theta\,\gamma)$.

Door uitschrijven in componenten krijg je

$$(\eta\,\theta)\,\gamma \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \eta_1\,\theta_1 \\ \eta_1\,\theta_2+\eta_2\,\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (\eta_1\,\theta_1)\,\gamma_1 \\ (\eta_1\,\theta_1)\,\gamma_2+(\eta_1\,\theta_2+\eta_2\,\theta_1)\,\gamma_1 \end{pmatrix} \overset{\star}{=} \begin{pmatrix} \eta_1\,(\theta_1\,\gamma_1) \\ \eta_1\,(\theta_1\,\gamma_2+\theta_2\,\gamma_1)+\eta_2\,(\theta_1\,\gamma_1) \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1\,\gamma_1 \\ \theta_1\,\gamma_2+\theta_2\,\gamma_1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \eta\,(\theta\,\gamma)\,.$$

De triviale gelijkheid aangeduid met $\star$ maakt gebruik van associativiteit van de gewone vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$.

b2. Bewijs dat $\forall\,\eta,\theta,\gamma \in \mathcal{G} \quad \eta\,(\theta+\gamma) = (\eta\,\theta)+(\eta\,\gamma)$.

$$\eta\,(\theta+\gamma) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1+\gamma_1 \\ \theta_2+\gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1\,(\theta_1+\gamma_1) \\ \eta_1\,(\theta_2+\gamma_2)+\eta_2\,(\theta_1+\gamma_1) \end{pmatrix} \overset{\star}{=} \begin{pmatrix} \eta_1\,\theta_1 \\ \eta_1\,\theta_2+\eta_2\,\theta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1\,\gamma_1 \\ \eta_1\,\gamma_2+\eta_2\,\gamma_1 \end{pmatrix} = (\eta\,\theta)+(\eta\,\gamma)\,.$$

Bij $\star$ is distributiviteit van de gewone vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$ gebruikt om haakjes in de componenten weg te werken en tevens gebruik gemaakt van de definitie van vectoroptelling om de kolomvector op te splitsen in twee termen.

b3. Bewijs dat $\forall\,\eta,\theta,\gamma \in \mathcal{G} \quad (\eta+\theta)\,\gamma = (\eta\,\gamma)+(\theta\,\gamma)$.

Je kunt het bewijs uitwerken in termen van componenten op geheel analoge wijze als bij onderdeel b2. Een alternatief bewijs maakt gebruik van commutativiteit ($\star$), hetgeen bij onderdeel d bewezen wordt, en van de distributieve wet uit onderdeel b2 ($*$):

$$(\eta+\theta)\,\gamma \overset{\star}{=} \gamma\,(\eta+\theta) \overset{*}{=} (\gamma\,\eta)+(\gamma\,\theta) \overset{\star}{=} (\eta\,\gamma)+(\theta\,\gamma)\,.$$

b4. Bewijs dat $\forall\,\eta,\theta \in \mathcal{G}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(\eta\,\theta) = (\lambda\,\eta)\,\theta = \eta\,(\lambda\,\theta)$.

We bewijzen eerst de eerste gelijkheid:

$$\lambda(\eta\,\theta) \overset{\text{def}}{=} \lambda \begin{pmatrix} \eta_1\,\theta_1 \\ \eta_1\,\theta_2+\eta_2\,\theta_1 \end{pmatrix} \overset{\star}{=} \begin{pmatrix} \lambda\,(\eta_1\,\theta_1) \\ \lambda(\eta_1\,\theta_2+\eta_2\,\theta_1) \end{pmatrix} \overset{*}{=} \begin{pmatrix} (\lambda\,\eta_1)\,\theta_1 \\ (\lambda\,\eta_1)\,\theta_2+(\lambda\,\eta_2)\,\theta_1) \end{pmatrix} \overset{\star}{=} \begin{pmatrix} (\lambda\,\eta)_1\,\theta_1 \\ (\lambda\,\eta)_1\,\theta_2+(\lambda\,\eta)_2\,\theta_1) \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} (\lambda\,\eta)\,\theta\,.$$

Bij $\star$ is gebruik gemaakt van de definitie van scalairvermenigvuldiging, bij $*$ is associativiteit van de vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$ gebruikt om haakjes te verschuiven. In de eerste en laatste stap is de definitie van vermenigvuldiging op $\mathcal{G}$ gebruikt.

(5) **c.** Laat zien dat er bovendien een eenheidselement $1 \in \mathcal{G}$ bestaat (niet te verwarren met het getal $1 \in \mathbb{R}$) en geef zijn kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^2$.

Noem de componenten van $1 \in \mathcal{G}$ duidelijkheidshalve $e_1 \in \mathbb{R}$ respectievelijk $e_2 \in \mathbb{R}$. Zij $\in \mathcal{G}$ willekeurig, en stel

$$1\,x = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1\,x_1 \\ e_1\,x_2+e_2\,x_1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

voor alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, waarbij in de laatste stap de definitie van het eenheidselement is gebruikt, dan volgt noodzakelijkerwijs dat $e_1 = 1$ en $e_2 = 0$. Conclusie:

$$1 \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Er moet ook nog gecontroleerd worden of geldt $x\,1 = x$ voor alle $x \in \mathcal{G}$. Dit kun je doen door componentsgewijs uitschrijven analoog aan bovenstaand, of door wederom gebruik te maken van commutativiteit, vooruitlopend op onderdeel d ($\star$):

$$x\,1 \overset{\star}{=} 1\,x = x \quad \text{voor alle } x \in \mathcal{G}\,.$$

(5) **d.** Is vermenigvuldiging op $\mathcal{G}$ commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Stel $x, y \in \mathcal{G}$ willekeurig, dan geldt

$$x\,y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\,y_1 \\ x_1\,y_2 + x_2\,y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\,x_1 \\ y_1\,x_2 + y_2\,x_1 \end{pmatrix} = y\,x\,.$$

We beschouwen nu de deelverzameling $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$, gedefinieerd door $\mathcal{G}_0 = \{\theta \in \mathcal{G} \mid \theta^2 = 0\}$. (Met θ^2 bedoelen we $\theta\,\theta$.)

(5) **e.** Geef een expliciete karakterisatie van $\mathcal{G}_0$ door aan te geven hoe de kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^2$ van een willekeurig element $\theta \in \mathcal{G}_0$ er uitziet.

In termen van componenten hebben we

$$\theta^2 = \begin{pmatrix} \theta_1^2 \\ 2\theta_1\theta_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In de laatste stap is gebruik gemaakt van het feit dat $\theta \in \mathcal{G}_0$. Dit is equivalent met de conditie $\theta_1 = 0$, m.a.w. een willekeurig element $\theta \in \mathcal{G}_0$ is van de vorm

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

met $\theta_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig.

Tenslotte voeren we op $\mathcal{G}$ een *ontaarde*, niet-negatieve, symmetrische, reëelwaardige, bilineaire vorm in. Voor $\eta, \theta \in \mathcal{G}$ duiden we deze aan met $\langle \eta | \theta \rangle \in \mathbb{R}$. In termen van de componenten van η en θ definiëren we deze als volgt:

$$\langle \eta | \theta \rangle = \eta_1\,\theta_1\,.$$

Let op: De toevoeging "ontaard" duidt erop dat $\langle\ |\ \rangle$ géén inprodukt definieert.

(5) **f.** Leg uit waarom $\langle\ |\ \rangle$ geen inprodukt definieert en verklaar daarmee de toevoeging "ontaard".

Voor een (niet-ontaard) inprodukt hebben we de conditie dat $\langle \theta | \theta \rangle = 0$ d.e.s.d.a. $\theta = 0 \in \mathcal{G}$. In geval van bovenstaande definitie geldt echter dat $\langle \theta | \theta \rangle = 0$ d.e.s.d.a. $\theta_1 = 0$, dus ongeacht de waarde van θ_2. Er bestaan dus niet-triviale elementen $\theta \in \mathcal{G}$ (nl. alle elementen met $\theta_1 = 0$ en $\theta_2 \neq 0$) waarvoor $\langle \theta | \theta \rangle = 0$ ("ontaarding").

We beschouwen nu de deelverzameling $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, gedefinieerd door $\mathcal{G}_1 = \{\theta \in \mathcal{G} \mid \langle \theta | \theta \rangle = 1\}$.

(5) **g.** Bewijs dat $\mathcal{G}_1$ een groep vormt ten aanzien van de vermenigvuldiging. Ga als volgt te werk:

g1. Laat zien dat als $\eta, \theta \in \mathcal{G}_1$ volgt $\eta\,\theta \in \mathcal{G}_1$ ("geslotenheid").

Je moet dus aantonen dat de deelverzameling $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ gesloten is onder vermenigvuldiging. Stel $\eta, \theta \in \mathcal{G}_1$, dan

$$\eta\,\theta = \begin{pmatrix} \eta_1\,\theta_1 \\ \eta_1\,\theta_2 + \eta_2\,\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{dus} \quad \langle \eta\,\theta | \eta\,\theta \rangle \stackrel{*}{=} (\eta\,\theta)_1^2 \stackrel{\star}{=} (\eta_1\,\theta_1)^2 = \eta_1^2\,\theta_1^2 = \langle \eta | \eta \rangle \langle \theta | \theta \rangle = 1\,.$$

Bij $*$ is de definitie van de bilineaire vorm $\langle \eta | \theta \rangle \in \mathbb{R}$ gebruikt, bij $\star$ die van (de eerste component van) het algebraïsche produkt $\eta\,\theta \in \mathcal{G}$. In de laatste stap is gebruik gemaakt van het gegeven dat $\eta, \theta \in \mathcal{G}_1$. Aangezien $\langle \eta\,\theta | \eta\,\theta \rangle = 1$ volgt $\eta\,\theta \in \mathcal{G}_1$.

g2. Bewijs dat $\forall\,\eta, \theta, \gamma \in \mathcal{G}_1 \quad (\eta\,\theta)\,\gamma = \eta\,(\theta\,\gamma)$ ("associativiteit").

Vermenigvuldiging op $\mathcal{G}$ is associatief (zie b1). Aangezien $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ is vermenigvuldiging binnen $\mathcal{G}_1$ ook associatief.

g3. Laat zien dat voor het eenheidselement uit onderdeel c geldt $1 \in \mathcal{G}_1$.

$\theta \in \mathcal{G}_1$ d.e.s.d.a. $\theta \in \mathcal{G}$ en $\langle\theta|\theta\rangle = 1$. Voor het eenheidselement is in onderdeel c reeds aangetoond dat $1 \in \mathcal{G}$. Gebruik makend van de componenten van het eenheidselement en de definitie van de bilineaire vorm volgt eenvoudig dat

$$\langle 1|1\rangle = 1\,.$$

Conclusie: $1 \in \mathcal{G}_1$.

g4. Laat zien dat voor gegeven $\theta \in \mathcal{G}_1$ een inverse $\theta^{-1} \in \mathcal{G}_1$ bestaat, zodanig dat $\theta\,\theta^{-1} = \theta^{-1}\,\theta = 1 \in \mathcal{G}_1$. Geef de kolomrepresentatie van θ^{-1} in $\mathbb{R}^2$ in termen van de componenten van θ.

Gegeven $\theta \in \mathcal{G}_1$ willekeurig. Schrijf $\theta^{-1} = \eta$ voor notationeel gemak. Er moet gelden dat $\eta\,\theta = 1 \in \mathcal{G}_1$. (Als dat het geval is geldt automatisch $\theta\,\eta = 1$ vanwege commutativiteit, zie onderdeel d.) M.a.w.

$$\begin{pmatrix} \eta_1\,\theta_1 \\ \eta_1\,\theta_2 + \eta_2\,\theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hetgeen je ook mag schrijven als

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Inversie levert

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ \theta_2 & \theta_1 \end{pmatrix}^{\text{inv}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\theta_1^2}\begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ -\theta_2 & \theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\theta_1} \\ -\dfrac{\theta_2}{\theta_1^2} \end{pmatrix} \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ -\theta_2 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat dit goed gedefinieerd is, daar $\theta_1 \neq 0$ voor alle $\theta \in \mathcal{G}_1$. De laatste stap, aangeduid met een $*$, maakt gebruik van het feit dat $\theta_1^2 = \langle\theta|\theta\rangle = 1$ voor alle $\theta \in \mathcal{G}_1$.

♣

(*20*) **2.** In deze opgave benaderen we de eerste orde partiële afgeleiden van een functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ middels de differentiequotiënten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx \frac{f(x+\frac{h}{2},y) - f(x-\frac{h}{2},y)}{h} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \approx \frac{f(x,y+\frac{h}{2}) - f(x,y-\frac{h}{2})}{h}$$

met $0 < h \ll 1$. In geval van discrete beelden op $\mathbb{Z}^2$ gebruiken we bovenstaande differentiequotiënten als definities voor discrete afgeleiden. In dat geval nemen de coördinaten x en y voor de indexering van roosterpunten alleen geheeltallige waarden aan en kiezen we voor de parameter h een natuurlijk getal.

(5) **a.** Gebruik bilineaire interpolatie om het differentiequotiënt voor $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ voor het geval $h=1$ te herschrijven tot een uitdrukking waarin slechts geheeltallige pixelcoördinaten voorkomen en laat zien dat dit overeenkomt met het differentiequotiënt voor het geval $h=2$.

Laten we de differentiequotiënten voor verschillende keuzen voor h onderscheiden door te definiëren

$$\begin{aligned} D_x f(x,y;h) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+\frac{h}{2},y) - f(x-\frac{h}{2},y)}{h} \\ D_y f(x,y;h) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x,y+\frac{h}{2}) - f(x,y-\frac{h}{2})}{h} \end{aligned}$$

Voor $h = 1$ hebben we

$$D_x f(x, y; 1) = f(x + \frac{1}{2}, y) - f(x - \frac{1}{2}, y) \,.$$

Voor $h = 2$ hebben we

$$D_x f(x, y; 2) = \frac{1}{2} f(x + 1, y) - \frac{1}{2} f(x - 1, y) \,.$$

In het rechterlid van de eerste vergelijking komen sub-pixel evaluaties voor, welke we middels bilineaire interpolatie (feitelijk één-dimensionale interpolatie, omdat $y \in \mathbb{Z}$ constant) kunnen herschrijven tot een uitdrukking waarin slechts geheeltallige pixels voorkomen. Per definitie stellen we dan

$$f(x + \frac{1}{2}, y) = \frac{f(x, y) + f(x + 1, y)}{2} \quad \text{en} \quad f(x - \frac{1}{2}, y) = \frac{f(x - 1, y) + f(x, y)}{2} \,.$$

Invullen in het rechterlid van de eerste vergelijking levert dan

$$D_x f(x, y; 1) \overset{\star}{=} \frac{f(x, y) + f(x + 1, y)}{2} - \left(\frac{f(x - 1, y) + f(x, y)}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x + 1, y) - \frac{1}{2} f(x - 1, y) \overset{\text{def}}{=} D_x f(x, y; 2) \,.$$

Bij $\star$ is de definitie van $D_x f(x, y; 1)$ en lineaire interpolatie gebruikt.

(5) **b.** Geef het overeenkomstige differentiequotiënt (voor willekeurige h) voor de gemengde 2^{de} orde afgeleide $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.

Definieer het differentiequotiënt behorende bij de gemengde tweede orde afgeleide als

$$D_{xy} f(x, y; h) \overset{\text{def}}{=} D_x \left(D_y f(x, y; h)\right) = \frac{f(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}h) - f(x + \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}h) + f(x - \frac{1}{2}h, y - \frac{1}{2}h)}{h^2} \,.$$

(Omkeren van de operatoren, d.i. $D_{xy} \overset{\text{def}}{=} D_y \circ D_x$, leidt tot hetzelfde resultaat.)

Voortaan nemen we $h = 1$.

Correctie: Hier had $h = 2$ moeten staan. Onderdelen c en d zijn niet in de beoordeling meegenomen, tenzij deze correct zijn beantwoord uitgaande van de keuze $h = 1$ in combinatie met bilineaire interpolatie. Onderdelen a en b zijn elk beoordeeld met een relatieve weegfactor 10 in plaats van 5.

(5) **c.** Zij ϕ_{xy} het discrete correlatiefilter waarvoor geldt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f \star \phi_{xy}$. Bepaal de numerieke waarden van $\phi(x, y)$ voor $-2 \leq x, y \leq 2$. Gebruik hiervoor Figuur 1 van de bijlage.

Onderstaande figuur toont het correlatiefilter voor het geval $h = 2$. De pixelwaarden vind je door de definitie van het correlatieprodukt te vergelijken met je antwoord bij onderdeel b (met $h = 2$):

$$(f \star \phi_{xy})(x, y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{(k,l) \in \mathbb{Z}^2} f(x+k, y+l)\, \phi_{xy}(k, l) = \frac{1}{4} \left(f(x + 1, y + 1) - f(x + 1, y - 1) - f(x - 1, y + 1) + f(x - 1, y - 1)\right) \,.$$

Kennelijk geldt

$$\phi_{xy}(-1, -1) = \phi_{xy}(1, 1) = \frac{1}{4} \quad \text{en} \quad \phi_{xy}(-1, 1) = \phi_{xy}(1, -1) = -\frac{1}{4} \,,$$

terwijl alle overige $\phi_{xy}(k, l)$, $k, l \neq \pm 1$, nul zijn:

0	0	0	0	0
0	−1/4	0	1/4	0
0	0	0	0	0
0	1/4	0	−1/4	0
0	0	0	0	0

Beschouw nu onderstaand 5×5 beeld. Het pixel linksonder heeft coördinaten $(x, y) = (1, 1)$, het pixel rechtsboven heeft coördinaten $(x, y) = (5, 5)$.

−7	1	0	5	0
−3	0	−1	−2	1
2	0	2	0	1
4	−1	3	4	2
0	4	0	0	1

(5) **d.** Bepaal $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ voor $1 \leq x, y \leq 5$. Vul alléén ondubbelzinnig gedefinieerde pixelwaarden in waarvan de bepaling geen randproblemen oplevert. Gebruik hiervoor Figuur 2 van de bijlage.

Onderstaande figuur toont het correlatieprodukt $f \star \phi_{xy}$ voor het geval $h = 2$. De pixelwaarden vind je door het discrete correlatiemasker uit onderdeel c te schuiven over het discrete beeld f zodanig dat het masker niet over de rand heen valt, en vervolgens de corresponderende filter- en beeldpixels te vermenigvuldigen en op te tellen, waarna je het resultaat toekent aan het centrale pixel:

?	?	?	?	?
?	7/4	1	1/4	?
?	3/4	−7/4	3/4	?
?	0	1	−1/2	?
?	?	?	?	?

Vraagtekens geven problematische pixel posities aan waar een randprobleem ontstaat.

♣

(*35*) **3.** Beschouw de functie $u_{a,s} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto u_{a,s}(x) = a\, e^{-s|x|}$, waarin $a, s \in \mathbb{R}^+$ constanten zijn. We definiëren de L^p-norm van een functie $u \in L^p(\mathbb{R})$ als

$$\|u\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (p \geq 1)\,.$$

(5) **a.** Bepaal die waarde van $a \in \mathbb{R}^+$ (uitgedrukt in s en p) waarvoor $\|u_{a,s}\|_p = 1$.

Gebruik makend van het feit dat de functie $u_{a,s}$ even is (tweede stap hieronder) vinden we

$$\|u_{a,s}\|_p^p = a^p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ps|x|}\, dx = 2a^p \int_0^{\infty} e^{-psx}\, dx = -\frac{2a^p}{ps}\left[e^{-psx}\right]_{x=0}^{x\to\infty} = \frac{2a^p}{ps}\,,$$

dus

$$1 = \|u_{a,s}\|_p = a\sqrt[p]{\frac{2}{ps}} \quad \text{impliceert} \quad a = \sqrt[p]{\frac{ps}{2}}\,.$$

We hanteren verder de volgende Fourierconventie:

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, u(x)\, dx\,.$$

(5) **b1.** Toon aan dat $\hat{u}_{a,s}(\omega) \in \mathbb{R}$ voor alle $\omega \in \mathbb{R}$ *zonder berekening* van het functievoorschrift.

Bekijk het imaginaire deel

$$\operatorname{Im} \hat{u}_{a,s}(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega x)\, u(x)\, dx = 0\,,$$

waarbij de laatste stap volgt uit het feit dat de integrand oneven is.

(5) **b2.** Bepaal het functievoorschrift $\hat{u}_{a,s}(\omega)$.

Volgens de gekozen Fourierconventie hebben we

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{a,s}(\omega) &= a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x - s|x|}\, dx = a\int_{-\infty}^{0} e^{(-i\omega+s)x}\, dx + a\int_0^{\infty} e^{(-i\omega-s)x}\, dx \\
&= \frac{a}{s-i\omega}\left[e^{(-i\omega+s)x}\right]_{x\to-\infty}^{x=0} - \frac{a}{s+i\omega}\left[e^{(-i\omega-s)x}\right]_{x=0}^{x\to\infty} = \frac{a}{s-i\omega} + \frac{a}{s+i\omega} = \frac{2as}{\omega^2+s^2}\,,
\end{aligned}$$

hetgeen inderdaad in overeenstemming is met de observatie uit onderdeel b1.

(5) **c.** Bepaal nogmaals de waarde van $a \in \mathbb{R}^+$ waarvoor $\|u_{a,s}\|_p = 1$, ditmaal door uitsluitend gebruik te maken van je resultaat voor $\hat{u}_{a,s}(\omega)$ uit onderdeel b.

$$\|u_{a,s}\|_p^p = \hat{u}_{a^p,ps}(0) = \frac{2a^p}{ps}\,.$$

De eerste stap volgt uit de definitie van $u_{a,s}$ en de gekozen Fourierconventie, de laatste stap uit onderdeel b2.

(5) **d.** Bewijs dat voor willekeurige $a, s \in \mathbb{R}^+$ geldt $\int_{-\infty}^{\infty} x\, u_{a,s}(x)\, dx = 0$.

(*Hint:* Een expliciete berekening is niet nodig.)

De integrand is oneven.

(5) **e.** Bewijs dat voor willekeurige $a, s \in \mathbb{R}^+$ geldt $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, u_{a,s}(x)\, dx = -\hat{u}''_{a,s}(0)$ en bereken de waarde van deze integraal. Het dubbele accentje staat voor tweede orde afgeleide.

In het algemeen geldt

$$-\hat{u}''(0) = -\frac{d^2}{d\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, u(x)\, dx \Big|_{\omega = 0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-i\omega x}\, u(x)\, dx \Big|_{\omega = 0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, u(x)\, dx\,.$$

In het bijzonder hebben we dus, gebruik makend van onderdeel b2,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, u_{a,s}(x)\, dx = -\hat{u}''_{a,s}(0) = -\frac{d^2}{d\omega^2} \frac{2as}{\omega^2 + s^2} \Big|_{\omega = 0} = \frac{4a}{s^3}\,.$$

(5) **f.** Bereken $(\hat{u}_{a,s} * \hat{u}_{b,t})(\omega)$. Hierin geldt $a, b, s, t \in \mathbb{R}^+$; $*$ staat voor het convolutieprodukt.

We hebben

$$\left(\hat{u}_{a,s} * \hat{u}_{b,t}\right)(\omega) = 2\pi \mathcal{F}(u_{a,s} u_{b,t})(\omega) = 2\pi \mathcal{F}(u_{ab,s+t})(\omega) = 2\pi \hat{u}_{ab,s+t}(\omega)\,,$$

waarbij $\mathcal{F}(u)$ synoniem is voor $\hat{u}$. In de eerste stap is een standaard Fourierstelling gebruikt, in de tweede is het specifieke functievoorschrift van $u_{a,s}$ gebruikt, waaruit direct volgt dat $u_{a,s} u_{b,t} = u_{ab,s+t}$.

♣

(*10*) **4.** Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x & \text{als } x < 0, \\ 0 & \text{als } x = 0, \\ x & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

We mogen f opvatten als reguliere getemperde distributie middels identificatie $f \sim T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Bewijs dat de tweede orde afgeleide in distributionele zin gegeven wordt door $f'' = 2\,\delta$, waarin $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de Dirac distributie voorstelt.

We identificeren f met T_f, d.w.z. we vatten de functie op als (reguliere) getemperde distributie:

$$T_f[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \phi(x)\, dx\,.$$

Per definitie geldt

$$\begin{aligned} T''_f[\phi] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \phi''(x)\, dx \stackrel{\star}{=} -\int_{-\infty}^{0} x\, \phi''(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x\, \phi''(x)\, dx \\ &\stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{0} \phi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} \phi'(x)\, dx = [\phi(x)]_{x \to -\infty}^{x=0} - [\phi(x)]_{x=0}^{x \to \infty} = 2\phi(0) \stackrel{\text{def}}{=} 2\delta[\phi]\,. \end{aligned}$$

De stap gemarkeerd door $\star$ maakt gebruik van de definitie $f(x) = |x|$ en opsplitsing van de integraal. De stap gemarkeerd door $*$ maakt gebruik van partiële integratie en het feit dat $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Vanwege de identificatie $f \sim T_f$ (en i.h.b. $f'' \sim T''_f$) kunnen we dus zeggen dat de 2$^{\text{de}}$ orde afgeleide f'' gelijk is aan 2δ.

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 2

Naam: Studentnummer:

Figuur 1: Het pixel linksonder heeft coördinaten $(x, y) = (-2, -2)$, het pixel rechtsboven heeft coördinaten $(x, y) = (2, 2)$. Voorzie de figuur van alle filterwaarden $\phi_{xy}(x, y)$, $-2 \leq x, y \leq 2$, overeenkomstig je antwoord op onderdeel c van vraag 2.

Figuur 2: Voor het pixel linksonder geldt $(x, y) = (1, 1)$, voor het pixel rechtsboven $(x, y) = (5, 5)$. Voorzie de figuur van alle *ondubbelzinnig gedefinieerde* beeldwaarden $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $1 \leq x, y \leq 5$, overeenkomstig je antwoord op onderdeel d van vraag 2. Arceer de vlakjes waarvoor een randprobleem ontstaat bij de bepaling van de beeldwaarden, of laat deze oningevuld.