TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Dinsdag 8 maart 2005. Tijd: 17.30–20.30 uur. Plaats: AUD 6,7,8.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.** In deze opgave beschouwen we de verzameling $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2$ voorzien van een aantal interne en externe operatoren. Een element $\theta \in \mathcal{G}$ identificeren we met zijn kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^2$:

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{waarbij } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \text{ (de “componenten van } \theta\text{”).}$$

Om te beginnen interpreteren we $\mathcal{G}$ als lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ door, op de gebruikelijke manier, vectoroptelling en scalairvermenigvuldiging in te voeren. We duiden de vectorsom van $\eta, \theta \in \mathcal{G}$ aan met $\eta + \theta$ en het scalaire veelvoud van $\theta \in \mathcal{G}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ met $\lambda\,\theta$.

(5) **a.** Leg uit wat er bedoeld wordt met “de gebruikelijke manier” door expliciet aan te geven hoe $\eta + \theta$ en $\lambda\,\theta$ gedefinieerd zijn in termen van hun componenten.

Verder voeren we een algebraïsche operatie in, welke we aanduiden als “vermenigvuldiging”. Het “produkt” van $\eta, \theta \in \mathcal{G}$ noteren we kortweg als $\eta\,\theta$, waarbij we afspreken dat, in termen van componenten,

$$\eta\,\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \eta_1\,\theta_1 \\ \eta_1\,\theta_2 + \eta_2\,\theta_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\,.$$

(5) **b.** Bewijs dat $\mathcal{G}$, voorzien van bovenstaande vermenigvuldigingsoperatie, een algebra vormt. Ga als volgt te werk (we nemen zonder verder bewijs aan dat $\mathcal{G}$ een lineaire ruimte is, zie onderdeel a):

b1. Bewijs dat $\forall\,\eta, \theta, \gamma \in \mathcal{G} \quad (\eta\,\theta)\,\gamma = \eta\,(\theta\,\gamma)$.

b2. Bewijs dat $\forall\,\eta, \theta, \gamma \in \mathcal{G} \quad \eta\,(\theta + \gamma) = (\eta\,\theta) + (\eta\,\gamma)$.

b3. Bewijs dat $\forall\,\eta, \theta, \gamma \in \mathcal{G} \quad (\eta + \theta)\,\gamma = (\eta\,\gamma) + (\theta\,\gamma)$.

b4. Bewijs dat $\forall\, \eta, \theta \in \mathcal{G}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(\eta\,\theta) = (\lambda\,\eta)\,\theta = \eta\,(\lambda\,\theta)$.

(5) **c.** Laat zien dat er bovendien een eenheidselement $1 \in \mathcal{G}$ bestaat (niet te verwarren met het getal $1 \in \mathbb{R}$) en geef zijn kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^2$.

(5) **d.** Is vermenigvuldiging op $\mathcal{G}$ commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

We beschouwen nu de deelverzameling $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$, gedefinieerd door $\mathcal{G}_0 = \{\theta \in \mathcal{G} \mid \theta^2 = 0\}$. (Met θ^2 bedoelen we $\theta\,\theta$.)

(5) **e.** Geef een expliciete karakterisatie van $\mathcal{G}_0$ door aan te geven hoe de kolomrepresentatie in $\mathbb{R}^2$ van een willekeurig element $\theta \in \mathcal{G}_0$ er uitziet.

Tenslotte voeren we op $\mathcal{G}$ een *ontaarde*, niet-negatieve, symmetrische, reëelwaardige, bilineaire vorm in. Voor $\eta, \theta \in \mathcal{G}$ duiden we deze aan met $\langle \eta | \theta \rangle \in \mathbb{R}$. In termen van de componenten van η en θ definiëren we deze als volgt:

$$\langle \eta | \theta \rangle = \eta_1\,\theta_1\,.$$

Let op: De toevoeging "ontaard" duidt erop dat $\langle\ |\ \rangle$ géén inprodukt definieert.

(5) **f.** Leg uit waarom $\langle\ |\ \rangle$ geen inprodukt definieert en verklaar daarmee de toevoeging "ontaard".

We beschouwen nu de deelverzameling $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$, gedefinieerd door $\mathcal{G}_1 = \{\theta \in \mathcal{G} \mid \langle \theta | \theta \rangle = 1\}$.

(5) **g.** Bewijs dat $\mathcal{G}_1$ een groep vormt ten aanzien van de vermenigvuldiging. Ga als volgt te werk:

g1. Laat zien dat als $\eta, \theta \in \mathcal{G}_1$ volgt $\eta\,\theta \in \mathcal{G}_1$ ("geslotenheid").

g2. Bewijs dat $\forall\, \eta, \theta, \gamma \in \mathcal{G}_1 \quad (\eta\,\theta)\,\gamma = \eta\,(\theta\,\gamma)$ ("associativiteit").

g3. Laat zien dat voor het eenheidselement uit onderdeel c geldt $1 \in \mathcal{G}_1$.

g4. Laat zien dat voor gegeven $\theta \in \mathcal{G}_1$ een inverse $\theta^{-1} \in \mathcal{G}_1$ bestaat, zodanig dat $\theta\,\theta^{-1} = \theta^{-1}\,\theta = 1 \in \mathcal{G}_1$. Geef de kolomrepresentatie van θ^{-1} in $\mathbb{R}^2$ in termen van de componenten van θ.

♣

(*20*) **2.** In deze opgave benaderen we de eerste orde partiële afgeleiden van een functie $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ middels de differentiequotiënten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \approx \frac{f(x+\frac{h}{2},y) - f(x-\frac{h}{2},y)}{h} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \approx \frac{f(x,y+\frac{h}{2}) - f(x,y-\frac{h}{2})}{h}$$

met $0 < h \ll 1$. In geval van discrete beelden op $\mathbb{Z}^2$ gebruiken we bovenstaande differentiequotiënten als definities voor discrete afgeleiden. In dat geval nemen de coördinaten x en y voor de indexering van roosterpunten alleen geheeltallige waarden aan en kiezen we voor de parameter h een natuurlijk getal.

(5) **a.** Gebruik bilineaire interpolatie om het differentiequotiënt voor $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ voor het geval $h=1$ te herschrijven tot een uitdrukking waarin slechts geheeltallige pixelcoördinaten voorkomen en laat zien dat dit overeenkomt met het differentiequotiënt voor het geval $h=2$.

(5) **b.** Geef het overeenkomstige differentiequotiënt (voor willekeurige h) voor de gemengde 2^{de} orde afgeleide $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

Voortaan nemen we $h=1$.

(5) **c.** Zij ϕ_{xy} het discrete correlatiefilter waarvoor geldt $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f \star \phi_{xy}$. Bepaal de numerieke waarden van $\phi(x,y)$ voor $-2 \leq x, y \leq 2$. Gebruik hiervoor Figuur 1 van de bijlage.

Beschouw nu onderstaand 5×5 beeld. Het pixel linksonder heeft coördinaten $(x,y) = (1,1)$, het pixel rechtsboven heeft coördinaten $(x,y) = (5,5)$.

−7	1	0	5	0
−3	0	−1	−2	1
2	0	2	0	1
4	−1	3	4	2
0	4	0	0	1

(5) **d.** Bepaal $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ voor $1 \leq x, y \leq 5$. Vul alléén ondubbelzinnig gedefinieerde pixelwaarden in waarvan de bepaling geen randproblemen oplevert. Gebruik hiervoor Figuur 2 van de bijlage.

♣

(*35*) **3.** Beschouw de functie $u_{a,s} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto u_{a,s}(x) = a\, e^{-s|x|}$, waarin $a, s \in \mathbb{R}^+$ constanten zijn. We definiëren de L^p-norm van een functie $u \in L^p(\mathbb{R})$ als

$$\|u\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)\,.$$

(5) **a.** Bepaal die waarde van $a \in \mathbb{R}^+$ (uitgedrukt in s en p) waarvoor $\|u_{a,s}\|_p = 1$.

We hanteren verder de volgende Fourierconventie:

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, u(x)\, dx\,.$$

(5) **b1.** Toon aan dat $\hat{u}_{a,s}(\omega) \in \mathbb{R}$ voor alle $\omega \in \mathbb{R}$ *zonder berekening* van het functievoorschrift.

(5) **b2.** Bepaal het functievoorschrift $\hat{u}_{a,s}(\omega)$.

(5) **c.** Bepaal nogmaals de waarde van $a \in \mathbb{R}^+$ waarvoor $\|u_{a,s}\|_p = 1$, ditmaal door uitsluitend gebruik te maken van je resultaat voor $\hat{u}_{a,s}(\omega)$ uit onderdeel b.

(5) **d.** Bewijs dat voor willekeurige $a, s \in \mathbb{R}^+$ geldt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, u_{a,s}(x)\, dx = 0$.
(*Hint:* Een expliciete berekening is niet nodig.)

(5) **e.** Bewijs dat voor willekeurige $a, s \in \mathbb{R}^+$ geldt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, u_{a,s}(x)\, dx = -\hat{u}''_{a,s}(0)$ en bereken de waarde van deze integraal. Het dubbele accentje staat voor tweede orde afgeleide.

(5) **f.** Bereken $(\hat{u}_{a,s} * \hat{u}_{b,t})(\omega)$. Hierin geldt $a, b, s, t \in \mathbb{R}^+$; $*$ staat voor het convolutieprodukt.

♣

(*10*) **4.** Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \begin{cases} -x & \text{als } x < 0, \\ 0 & \text{als } x = 0, \\ x & \text{als } x > 0. \end{cases}$$

We mogen f opvatten als reguliere getemperde distributie middels identificatie $f \sim T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Bewijs dat de tweede orde afgeleide in distributionele zin gegeven wordt door $f'' = 2\,\delta$, waarin $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de Dirac distributie voorstelt.

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 2

Naam: Studentnummer:

Figuur 1: Het pixel linksonder heeft coördinaten $(x, y) = (-2, -2)$, het pixel rechtsboven heeft coördinaten $(x, y) = (2, 2)$. Voorzie de figuur van alle filterwaarden $\phi_{xy}(x, y)$, $-2 \leq x, y \leq 2$, overeenkomstig je antwoord op onderdeel c van vraag 2.

Figuur 2: Voor het pixel linksonder geldt $(x, y) = (1, 1)$, voor het pixel rechtsboven $(x, y) = (5, 5)$. Voorzie de figuur van alle *ondubbelzinnig gedefinieerde* beeldwaarden $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $1 \leq x, y \leq 5$, overeenkomstig je antwoord op onderdeel d van vraag 2. Arceer de vlakjes waarvoor een randprobleem ontstaat bij de bepaling van de beeldwaarden, of laat deze oningevuld.