TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: woensdag 17 januari 2007. Tijd: 09:00–12:00. Plaats: HG 10.01.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat met aantekeningen is toegestaan. Calculator, losse aantekeningen en overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.** In deze opgave trachten we een matrixgroep te construeren, waarbij we als volgt te werk gaan. Om te beginnen poneren we een verzameling Θ van de volgende gedaante:

$$\Theta = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \; a, b, v \in \mathbb{R} \text{ willekeurig} \right\}$$

Voor de vermeende groepsoperatie kiezen we het gebruikelijke matrixproduct.

a. Bewijs dat Θ, aldus gedefinieerd, in het algemeen géén groep vormt. Ga als volgt te werk en beantwoord daarbij *alle* onderdelen hieronder, ook indien je reeds voortijdig meent te kunnen concluderen dat Θ geen groep vormt.

(5) **a1.** Is Θ gesloten ten aanzien van het matrixproduct, m.a.w. impliceert $S, T \in \Theta$ dat $ST \in \Theta$?

Voor willekeurige $a, b, c, d, v, w \in \mathbb{R}$ geldt

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \Theta \quad \text{en} \quad T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c & w \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

zodat

$$ST = \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & w \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & aw + dv \\ 0 & bd \end{pmatrix} \in \Theta,$$

dus Θ is gesloten t.a.v. het matrixproduct.

(5) **a2.** Bewijs dat voor willekeurige 2×2-matrices het matrixproduct associatief is.

Voor elk drietal $n \times n$-matrices A, B, C met componenten $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \ldots, n$, geldt

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \, [BC]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{l=1}^{n} [AB]_{il} \, c_{lj} = [(AB)C]_{ij} \quad \text{voor alle } i, j = 1, \ldots, n,$$

dus $A(BC) = (AB)C$. (In dit geval is $n = 2$.)

(5) **a3.** Laat zien dat er een eenheidselement $E \in \Theta$ bestaat.

Het is onmiddellijk duidelijk dat

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Theta\,.$$

Dit is het eenheidselement voor matrixvermenigvuldiging voor algemene 2×2-matrices, dus ook van Θ.

(5) **a4.** Geef, indien deze bestaat, een formule voor de matrixinverse T^{-1} voor willekeurige $T \in \Theta$, evenals de voorwaarde waaronder deze goed gedefinieerd is.

Stel

$$T = \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad a, b, v \in \mathbb{R} \text{ willekeurig.}$$

Matrix inversie levert

$$T^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} b & -v \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \Theta \quad \text{d.e.s.d.a. } \det T = ab \neq 0.$$

(5) **b.** Welke (minimale) extra conditie moet je opleggen aan de parameters a, b, v in de definitie van Θ opdat Θ een groep vormt? Noem de groep die je door deze aanpassing verkrijgt Γ en ga na dat de door jou voorgestelde conditie inderdaad een groepsstructuur definieert op $\Gamma \subset \Theta$ door **a1**–**a4** opnieuw te doorlopen, maar nu met inachtneming van de extra conditie:

Zie a4:

$$\Gamma = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, v \in \mathbb{R} \text{ willekeurig, met } ab \neq 0 \right\}$$

b1. als **a1.** voor Γ i.p.v. Θ,

Kies de matrices S en T als in onderdeel a1, maar met de restricties $ab \neq 0$ resp. $cd \neq 0$, zodat $S, T \in \Gamma$. Voor het product $ST \in \Theta$ geldt dan dat de determinant gelijk is aan $\det(ST) = \det S \det T \neq 0$, dus geldt ook $ST \in \Gamma$. Γ is dus eveneens gesloten t.a.v. het matrixproduct.

b2. als **a2.** voor Γ i.p.v. Θ,

Zie a2.

b3. als **a3.** voor Γ i.p.v. Θ,

Het eenheidselement uit a3 zit ook in Γ, aangezien $\det I = 1 \neq 0$.

b4. als **a4.** voor Γ i.p.v. Θ.

Zie a4. Als $T \in \Gamma$ is per definitie aan de gestelde conditie, $\det T \neq 0$, voldaan.

(5) **c.** Is Γ commutatief? Zo nee, welke (minimale) extra conditie moet je opleggen in de definitie van Γ opdat Γ een commutatieve groep vormt? Noem de groep die je door deze aanpassing verkrijgt K en ga na dat de door jou voorgestelde conditie de groepseigenschap niet schaadt door wederom alle groepscriteria te verifiëren, ditmaal voor $K \subset \Gamma$:

Stel

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c & w \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{met } \det S \det T = abcd \neq 0, \text{ zodat } S, T \in \Gamma\,,$$

en stel $ST = TS$ voor $S, T \in \Gamma$. Uit a1 volgt dat dit equivalent is met

$$\begin{pmatrix} ac & aw + dv \\ 0 & bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & cv + bw \\ 0 & bd \end{pmatrix}.$$

(Merk op dat je de matrix TS vindt door de verwisseling $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow d$ en $v \leftrightarrow w$ uit te voeren in de uitdrukking voor TS.) Dit geldt d.e.s.d.a. $aw + dv = cv + bw$ oftewel $(a - b)w = (c - d)v$. Let op: We moeten een generieke conditie op a, b, v in de definitie van Γ formuleren zonder enige verwijzing naar de parameters c, d, w. Geval (i): Als we als conditie opleggen dat $v = 0$ (*ergo* $w = 0$), dan is aan deze identiteit voldaan. Geval (ii): Als we als conditie opleggen dat $a - b = 0$ (*ergo* $c - d = 0$), dan is eveneens aan deze identiteit voldaan. Als we geen van beide condities opleggen, dan geldt

$$\frac{a-b}{v} = \frac{c-d}{w} \quad \text{als } v, w \neq 0, \text{ ofwel} \quad \frac{v}{a-b} = \frac{w}{c-d} \quad \text{als } a - b, c - d \neq 0.$$

Omdat het linkerlid niet van c, d, w af mag hangen moet dus gelden dat het betreffende linkerlid constant moet zijn, wat leidt tot de conditie

$$\lambda v + \mu(a - b) = 0 \quad \text{voor een of andere } \textit{vast gekozen tweetal } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Merk op dat de hiervoor besproken gevallen (i) en (ii) speciale gevallen zijn van deze conditie, nl. corresponderend met de keuzen $\lambda \neq 0, \mu = 0$, resp. $\lambda = 0, \mu \neq 0$. Al met al:

$$K = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, v \in \mathbb{R} \text{ willekeurig, met } ab \neq 0 \text{ en } \lambda v + \mu(a - b) = 0 \text{ voor vast gekozen } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Deze verzameling $K \subset \Gamma$ is uiteraard een deelverzameling van Γ, maar *niet noodzakelijkerwijs* een (sub)groep (van Γ)!

c1. als a1. voor K i.p.v. Θ,

Kies $S, T \in K$ willekeurig, zeg wederom als hierboven, maar nu met de definiërende eigenschappen $\lambda v + \mu(a - b) = 0$ resp. $\lambda w + \mu(c - d) = 0$, naast $\det S = ab \neq 0$ resp. $\det T = cd \neq 0$. Voor het product ST (zie hierboven) geldt $\det(ST) \neq 0$ aangezien $K \subset \Gamma$. Bovendien geldt voor het boven-diagonaalelement

$$\lambda(cv + bw) + \mu(ac - bd) = c(\lambda v) + b(\lambda w) + \mu(ac - bd) \stackrel{*}{=} c(\mu(b - a)) + b(\mu(d - c)) + \mu(ac - bd) = 0 \quad \text{voor elke } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

In $*$ zijn de condities $\lambda v + \mu(a - b) = 0$ en $\lambda w + \mu(c - d) = 0$ gebruikt. Conclusie: Ook de productmatrix ST voldoet aan de voorwaarde van de set K. Daarmee is K dus gesloten t.a.v. het matrixproduct.

N.B.: Vooruitlopend op onderdeel d: Aangezien $K \subset \Gamma$, waarin Γ een groep is, volgt dat K een subgroep is (K “erft” nl. automatisch alle groepseigenschappen, m.u.v. geslotenheid, van Γ.) Aan onderdelen c3–c4 is dus automatisch voldaan.

c2. als a2. voor K i.p.v. Θ,

Zie a2.

c3. als a3. voor K i.p.v. Θ,

Zie c1 onder “N.B.”, of rechtstreeks: $I \in K$ aangezien $\det I = 1 \neq 0$ en $0 = \gamma(1 - 1)$.

c4. als a4. voor K i.p.v. Θ.

Zie conclusie c1, of rechtstreeks: Stel $T \in \Gamma$ als voorheen, dus o.g.v. onderdeel b4:

$$T^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} b & -v \\ 0 & a \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a' & v' \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in \Gamma \quad \text{met } a' = \frac{1}{a},\ b' = \frac{1}{b} \text{ en } v' = -\frac{v}{ab}.$$

Nu geldt

$$\lambda v' + \mu(a' - b') \overset{\star}{=} -\lambda \frac{v}{ab} + \mu(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = -\frac{1}{ab}\left(\lambda v + \mu(a-b)\right) \overset{*}{=} 0\,.$$

In $\star$ is de definitie van a', b', v' gebruikt, in $*$ de eigenschap $\lambda v + \mu(a-b) = 0$. Conclusie: ook voor T^{-1} geldt de gestelde additionele eis, m.a.w. $T^{-1} \in K$.

Een *subgroep* is gedefinieerd als een deelverzameling van een groep welke zelf eveneens een groep vormt. (De subgroep "erft" hierbij zijn groepsoperatie van de groep.)

(5) **d.** Geef twee verschillende subgroepen $K_1, K_2 \subset K$ (waarbij $K_1, K_2 \neq K$). Je hoeft hiertoe de respectievelijke groepscriteria niet nogmaals te verifiëren.

Zie onderdeel c. Voorbeelden: Kies (i) $v = 0$ of (ii) $a = b$. Hiervan kun je desgewenst nog speciale gevallen bekijken, waarvan de meest triviale het geval $a = b = 1, v = 0$ is, d.i. de triviale subgroep $\{I\}$ bestaande uit enkel het eenheidselement. Een niet-triviaal geval is bijvoorbeeld die welke volgt uit de keuze $\lambda = \mu = 1$, d.i. $v = b - a$.

♣

(*20*) **2.** Beschouw de functie $\phi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor gegeven parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$, met functievoorschrift

$$\phi_\lambda(x) = e^{-\lambda |x|}\,.$$

De p-norm van een geschikt gekozen functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd als

$$\|f\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}\,.$$

De sup-norm wordt gegeven door

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|\,.$$

(5) **a.** Bereken $\|\phi_\lambda\|_1$.

Gebruik makend van symmetry van de integrand $(*)$ vinden we:

$$\|\phi_\lambda\|_1 \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda |x|} \, dx \overset{*}{=} 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx = -\frac{2}{\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda}\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **b1.** Toon aan dat $\|\phi_\lambda\|_p = \|\phi_{\lambda p}\|_1^{\frac{1}{p}}$ voor willekeurige $p \geq 1$.

Uitschrijven levert

$$\|\phi_\lambda\|_p^p \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-\lambda |x|}\right)^p \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\lambda |x|} \, dx = \|\phi_{\lambda p}\|_1\,,$$

waaruit het gesteld volgt.

($2\frac{1}{2}$) **b2.** Bereken $\|\phi_\lambda\|_p$ voor $p \geq 1$ als functie van $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Uit onderdelen a en b1 volgt

$$\|\phi_\lambda\|_p = \sqrt[p]{\frac{2}{\lambda p}} .$$

($2\frac{1}{2}$) **b3.** Idem voor $\|\phi_\lambda\|_\infty$.

$$\|\phi_\lambda\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_\lambda(x)| \stackrel{*}{=} \max_{x\in\mathbb{R}} \phi_\lambda(x) \stackrel{\star}{=} \phi_\lambda(0) = 1 .$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van het feit dat ϕ_λ positief is en een maximum heeft, nl. voor $x = 0$ ($\star$).

We normeren ϕ_λ nu voor elke parameterwaarde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en iedere $p \geq 1$ als volgt:

$$\psi_{\lambda,p}(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(\lambda, p)\, \phi_\lambda(x) \quad (x \in \mathbb{R}) ,$$

zodanig dat $\|\psi_{\lambda,p}\|_p = 1$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en $p \geq 1$.

($2\frac{1}{2}$) **b4.** Bepaal de normeringsfactor $A(\lambda, p)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en $p \geq 1$, evenals voor de formele parameterwaarde $p = \infty$, dwz. voor de sup-norm.

Stel

$$1 = \|\psi_{\lambda,p}\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \|A(\lambda, p)\, \phi_\lambda\|_p \stackrel{*}{=} |A(\lambda, p)|\, \|\phi_\lambda\|_p = |A(\lambda, p)| \sqrt[p]{\frac{2}{\lambda p}}$$

Bij $*$ is een van de definiërende eigenschappen van een norm toegepast, en in de laatste stap is de uitkomst van onderdeel b2 gebruikt. Gevolg:

$$A(\lambda, p) = \pm \sqrt[p]{\frac{\lambda p}{2}} .$$

(5) **c.** Bewijs dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n\, e^{-|x|}\, dx = 2n! .$$

(*Hint:* Ga na wat er gebeurt als je $\|\phi_\lambda\|_1$ differentieert naar λ en gebruik onderdeel **a**.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n\, e^{-\lambda\,|x|}\, dx \stackrel{*}{=} (-1)^n \left.\frac{d^n \|\phi_\lambda\|_1}{d\lambda^n}\right|_{\lambda\,=\,1} \stackrel{\star}{=} \left.\frac{2n!}{\lambda^{n+1}}\right|_{\lambda\,=\,1} = 2n! .$$

In $*$ is gebruik gemaakt van de definitie van de 1-norm en de kettingregel (bij iedere λ-afgeleide krijgen we een factor $|x|$ in de integrand), terwijl $\star$ gebruik maakt van het feit dat $\|\phi_\lambda\|_1 = 2/\lambda$ en

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{\lambda} = (-1)^n \frac{n!}{\lambda^{n+1}} .$$

♣

(*30*) **3.** In deze opgave hanteren we de volgende Fourier conventie:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \quad \text{met bijgevolg} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\,.$$

Verder definiëren we het volgende complexwaardige ééndimensionale signaal $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x)$, met functievoorschrift

$$f_{a,b}(x) = e^{(a+bi)\,|x|}\,.$$

Hierin zijn $a, b \in \mathbb{R}$ constant gekozen parameters en duidt $|x|$ de absolute waarde aan van $x \in \mathbb{R}$.

(10) **a.** Bepaal $\widehat{f}_{a,b}(\omega)$ en vermeld daarbij eventuele noodzakelijke voorwaarden waaraan $a, b \in \mathbb{R}$ moeten voldoen opdat deze functie (in niet-distributionele zin) goed gedefinieerd is.

$$\widehat{f}_{a,b}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f_{a,b}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x + (a+bi)|x|}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(-a-(b+\omega)i)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{(a+(b-\omega)i)x}\, dx =$$

$$\frac{-1}{a+(b+\omega)i}\left[e^{-ax}\, e^{-(b+\omega)ix}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{a+(b-\omega)i}\left[e^{ax}\, e^{(b-\omega)ix}\right]_{0}^{\infty} = \left(-\frac{1}{a+(b+\omega)i} - \frac{1}{a+(b-\omega)i}\right) \stackrel{*}{=} -\frac{2(a+bi)}{(a+bi)^2+\omega^2}\,,$$

onder de noodzakelijke voorwaarde dat $a < 0$. De laatste stap ($*$) en de bijbehorende conditie volgen uit de limieten

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-ax}\, e^{-(b+\omega)ix} = \lim_{x\to\infty} e^{ax}\, e^{(b-\omega)ix} = 0 \quad \text{d.e.s.d.a. } a < 0.$$

Merk op dat de oscillerende factoren $e^{-(b+\omega)ix}$ en $e^{(b-\omega)ix}$ er hier niet toe doen, aangezien hun absolute waarde één is.

De convolutie van twee functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt gegeven door

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy\,.$$

b. Bewijs dat convolutie associatief en commutatief is, d.w.z. dat voor alle $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ waarvoor onderstaande uitdrukkingen goed gedefinieerd zijn geldt

(5) **b1.** $f * (g * h) = (f * g) * h$, en

Herhaaldelijk gebruik makend van de stelling $\mathscr{F}(f * g) = \mathscr{F}(f)\, \mathscr{F}(g)$, oftewel $f * g = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)\, \mathscr{F}(g))$, vinden we

$$f*(g*h) = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)\, \mathscr{F}(g*h)) = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)\, (\mathscr{F}(g)\, \mathscr{F}(h))) \stackrel{*}{=} \mathscr{F}^{-1}((\mathscr{F}(f)\, \mathscr{F}(g))\, \mathscr{F}(h)) = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f*g)\, \mathscr{F}(h)) = (f*g)*h\,.$$

Bij $*$ is associativiteit van de gewone functievermenigvuldiging gebruikt.

(5) **b2.** $f * g = g * f$.

Op analoge wijze volgt

$$f * g = \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)\, \mathscr{F}(g)) \stackrel{*}{=} \mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(g)\, \mathscr{F}(f)) = g * f\,.$$

Bij $*$ is commutativiteit van de gewone functievermenigvuldiging gebruikt.

Met het symbool $*^n$ duiden we n-voudige convolutie aan, dus

$$f *^n f \stackrel{\text{def}}{=} f * \ldots * f \quad \text{met } n{+}1 \text{ factoren } f.$$

(5) **c.** Bepaal het functievoorschrift van de functie $\widehat{f}_{a,b} *^n \widehat{f}_{a,b}$ voor die $a, b \in \mathbb{R}$ waarvoor $\widehat{f}_{a,b}$ goed gedefinieerd is (zie onderdeel a).

Schrijf $\mathscr{F}(f) = \widehat{f}$, dan geldt voor het product van twee functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\mathscr{F}(f\,g) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathscr{F}(f) * \mathscr{F}(g)\right) \quad \text{dus} \quad \widehat{f} * \widehat{g} = 2\pi\, \mathscr{F}(f\,g)\,.$$

In het bijzonder volgt dus

$$\widehat{f}_{a,b} *^n \widehat{f}_{a,b} = (2\pi)^n\, \mathscr{F}(f_{a,b}^{n+1}) \stackrel{*}{=} (2\pi)^n\, \mathscr{F}(f_{(n+1)a,(n+1)b}) = (2\pi)^n\, \widehat{f}_{(n+1)a,(n+1)b}\,.$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van het expliciete functievoorschrift van $f_{a,b}$, waaruit blijkt dat $f_{a,b}^n(x) = (f_{a,b}(x))^n = (e^{(a+bi)|x|})^n = e^{(na+nbi)|x|} = f_{na,nb}(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Conclusie:

$$\left(\widehat{f}_{a,b} *^n \widehat{f}_{a,b}\right)(\omega) = (2\pi)^n\, \widehat{f}_{(n+1)a,(n+1)b}(\omega) \stackrel{\text{a}}{=} -(2\pi)^n\, \frac{2(n+1)(a+bi)}{(n+1)^2(a+bi)^2 + \omega^2}\,.$$

(5) **d.** Zij $g(x) = x\, e^{-|x|}$. Bepaal $\widehat{g}(\omega)$.

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-i\omega x - |x|}\, dx = i\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x-|x|}\, dx = i\frac{d}{d\omega}\widehat{f}_{a=-1,b=0}(\omega) \stackrel{\text{a}}{=} i\frac{d}{d\omega}\frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

♣

(*15*) **4.** Beschouw de functie $\beta_\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \beta_\rho(x, y)$, met functievoorschrift

$$\beta_\rho(x,y) = \begin{cases} A(\rho) & \text{als } 0 \le x^2 + y^2 \le \rho^2 \\ 0 & \text{als } x^2 + y^2 > \rho^2\,. \end{cases}$$

Hierin is $\rho \in \mathbb{R}^+$ een constante parameter en $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \rho \mapsto A(\rho)$ een gegeven functie. $T_{\beta_\rho} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ is de bij de functie β_ρ behorende reguliere getemperde distributie, dus

$$T_{\beta_\rho}[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \beta_\rho(x,y)\, \phi(x,y)\, dxdy\,,$$

voor willekeurige testfunctie $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$. Bewijs de volgende

Stelling: Als $A(\rho) = \dfrac{1}{\pi\rho^2}$, dan $\lim_{\rho\to 0} T_{\beta_\rho} = \delta$. Hierin is δ de Dirac distributie in de oorsprong.
(*Hint:* Beschouw $\psi(x,y) = \phi(x,y) - \phi(0,0)$ en gebruik de Hölder ongelijkheid om $T_{\beta_\rho}[\psi]$ af te schatten; maak hierin gebruik van de sup-norm $\|\psi\|_\infty$ van ψ op het effectieve deeldomein van $\mathbb{R}^2$ waarop de integraal feitelijk gedefinieerd is.)

$$\left|T_{\beta_\rho}[\psi]\right| \stackrel{\text{def}}{=} \left|\iint_{\mathbb{R}^2} \beta_\rho(x,y)\, \psi(x,y)\, dxdy\right| \le \iint_{\mathbb{R}^2} |\beta_\rho(x,y)\, \psi(x,y)|\, dxdy = \iint_{B(\rho)} |\beta_\rho(x,y)\, \psi(x,y)|\, dxdy \le \|\beta_\rho\|_1\, \|\psi\|_\infty\,.$$

Hierin is $B(\rho) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$ en

$$\|\beta_\rho\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R}^2} |\beta_\rho(x,y)|\, dxdy = A(\rho) \iint_{B(\rho)} dxdy = A(\rho)\, \pi\rho^2 = 1\,,$$

en

$$\|\psi\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(x,y)\in B(\rho)} |\psi(x,y)| = \max_{(x,y)\in B(\rho)} |\psi(x,y)| = \max_{(x,y)\in B(\rho)} |\phi(x,y) - \phi(0,0)|\,.$$

Conclusie:

$$-\max_{(x,y)\in B(\rho)} |\phi(x,y) - \phi(0,0)| \leq T_{\beta_\rho}[\psi] \leq \max_{(x,y)\in B(\rho)} |\phi(x,y) - \phi(0,0)|\,.$$

Vanwege continuïteit van $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ geldt dat als we de limiet $\rho \to 0$ nemen, linker- en rechterlid beide naar 0 convergeren, zodat

$$\lim_{\rho\to 0} T_{\beta_\rho}[\psi] = 0\,,$$

m.a.w.

$$\lim_{\rho\to 0} T_{\beta_\rho}[\phi] = \phi(0,0) = \delta(\phi)\,.$$

Omdat dit voor alle $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ geldt volgt $\lim\limits_{\rho\to 0} T_{\beta_\rho} = \delta$.

EINDE