TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: woensdag 17 januari 2007. Tijd: 09:00–12:00. Plaats: HG 10.01.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat met aantekeningen is toegestaan. Calculator, losse aantekeningen en overige hulpmiddelen zijn niet toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*35*) **1.** In deze opgave trachten we een matrixgroep te construeren, waarbij we als volgt te werk gaan. Om te beginnen poneren we een verzameling Θ van de volgende gedaante:

$$\Theta = \left\{ T = \begin{pmatrix} a & v \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, v \in \mathbb{R} \text{ willekeurig} \right\}$$

Voor de vermeende groepsoperatie kiezen we het gebruikelijke matrixproduct.

a. Bewijs dat Θ, aldus gedefinieerd, in het algemeen géén groep vormt. Ga als volgt te werk en beantwoord daarbij *alle* onderdelen hieronder, ook indien je reeds voortijdig meent te kunnen concluderen dat Θ geen groep vormt.

(5) **a1.** Is Θ gesloten ten aanzien van het matrixproduct, m.a.w. impliceert $S, T \in \Theta$ dat $ST \in \Theta$?

(5) **a2.** Bewijs dat voor willekeurige 2×2-matrices het matrixproduct associatief is.

(5) **a3.** Laat zien dat er een eenheidselement $E \in \Theta$ bestaat.

(5) **a4.** Geef, indien deze bestaat, een formule voor de matrixinverse T^{-1} voor willekeurige $T \in \Theta$, evenals de voorwaarde waaronder deze goed gedefinieerd is.

(5) **b.** Welke (minimale) extra conditie moet je opleggen aan de parameters a, b, v in de definitie van Θ opdat Θ een groep vormt? Noem de groep die je door deze aanpassing verkrijgt Γ en ga na dat de door jou voorgestelde conditie inderdaad een groepsstructuur definieert op $\Gamma \subset \Theta$ door **a1**–**a4** opnieuw te doorlopen, maar nu met inachtneming van de extra conditie:

b1. als **a1.** voor Γ i.p.v. Θ,

b2. als **a2.** voor Γ i.p.v. Θ,

b3. als **a3.** voor Γ i.p.v. Θ,

b4. als **a4.** voor Γ i.p.v. Θ.

(5) **c.** Is Γ commutatief? Zo nee, welke (minimale) extra conditie moet je opleggen in de definitie van Γ opdat Γ een commutatieve groep vormt? Noem de groep die je door deze aanpassing verkrijgt K en ga na dat de door jou voorgestelde conditie de groepseigenschap niet schaadt door wederom alle groepscriteria te verifiëren, ditmaal voor $K \subset \Gamma$:

c1. als **a1.** voor K i.p.v. Θ,

c2. als **a2.** voor K i.p.v. Θ,

c3. als **a3.** voor K i.p.v. Θ,

c4. als **a4.** voor K i.p.v. Θ.

Een *subgroep* is gedefinieerd als een deelverzameling van een groep welke zelf eveneens een groep vormt. (De subgroep "erft" hierbij zijn groepsoperatie van de groep.)

(5) **d.** Geef twee verschillende subgroepen $K_1, K_2 \subset K$ (waarbij $K_1, K_2 \neq K$). Je hoeft hiertoe de respectievelijke groepscriteria niet nogmaals te verifiëren.

♣

(*20*) **2.** Beschouw de functie $\phi_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voor gegeven parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$, met functievoorschrift

$$\phi_\lambda(x) = e^{-\lambda |x|} .$$

De p-norm van een geschikt gekozen functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd als

$$\|f\|_p = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} .$$

De sup-norm wordt gegeven door

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| .$$

(5) **a.** Bereken $\|\phi_\lambda\|_1$.

($2\frac{1}{2}$) **b1.** Toon aan dat $\|\phi_\lambda\|_p = \|\phi_{\lambda p}\|_1^{\frac{1}{p}}$ voor willekeurige $p \geq 1$.

($2\frac{1}{2}$) **b2.** Bereken $\|\phi_\lambda\|_p$ voor $p \geq 1$ als functie van $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

($2\frac{1}{2}$) **b3.** Idem voor $\|\phi_\lambda\|_\infty$.

We normeren ϕ_λ nu voor elke parameterwaarde $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en iedere $p \geq 1$ als volgt:

$$\psi_{\lambda,p}(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(\lambda, p)\, \phi_\lambda(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

zodanig dat $\|\psi_{\lambda,p}\|_p = 1$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en $p \geq 1$.

($2\frac{1}{2}$) **b4.** Bepaal de normeringsfactor $A(\lambda, p)$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ en $p \geq 1$, evenals voor de formele parameterwaarde $p = \infty$, dwz. voor de sup-norm.

(5) **c.** Bewijs dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n\, e^{-|x|}\, dx = 2n!\,.$$

(*Hint:* Ga na wat er gebeurt als je $\|\phi_\lambda\|_1$ differentieert naar λ en gebruik onderdeel **a**.)

♣

(*30*) **3.** In deze opgave hanteren we de volgende Fourier conventie:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \quad \text{met bijgevolg} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega\,.$$

Verder definiëren we het volgende complexwaardige ééndimensionale signaal $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto f(x)$, met functievoorschrift

$$f_{a,b}(x) = e^{(a+bi)\,|x|}\,.$$

Hierin zijn $a, b \in \mathbb{R}$ constant gekozen parameters en duidt $|x|$ de absolute waarde aan van $x \in \mathbb{R}$.

(10) **a.** Bepaal $\widehat{f_{a,b}}(\omega)$ en vermeld daarbij eventuele noodzakelijke voorwaarden waaraan $a, b \in \mathbb{R}$ moeten voldoen opdat deze functie (in niet-distributionele zin) goed gedefinieerd is.

De convolutie van twee functies $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wordt gegeven door

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy\,.$$

b. Bewijs dat convolutie associatief en commutatief is, d.w.z. dat voor alle $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ waarvoor onderstaande uitdrukkingen goed gedefinieerd zijn geldt

(5) **b1.** $f * (g * h) = (f * g) * h$, en

(5) **b2.** $f * g = g * f$.

Met het symbool $*^n$ duiden we n-voudige convolutie aan, dus

$$f *^n f \stackrel{\text{def}}{=} f * \ldots * f \quad \text{met } n{+}1 \text{ factoren } f.$$

(5) **c.** Bepaal het functievoorschrift van de functie $\widehat{f}_{a,b} *^n \widehat{f}_{a,b}$ voor die $a, b \in \mathbb{R}$ waarvoor $\widehat{f}_{a,b}$ goed gedefinieerd is (zie onderdeel a).

(5) **d.** Zij $g(x) = x\, e^{-|x|}$. Bepaal $\widehat{g}(\omega)$.

♣

(*15*) **4.** Beschouw de functie $\beta_\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \beta_\rho(x, y)$, met functievoorschrift

$$\beta_\rho(x, y) = \begin{cases} A(\rho) & \text{als } 0 \le x^2 + y^2 \le \rho^2 \\ 0 & \text{als } x^2 + y^2 > \rho^2 \,. \end{cases}$$

Hierin is $\rho \in \mathbb{R}^+$ een constante parameter en $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \rho \mapsto A(\rho)$ een gegeven functie. $T_{\beta_\rho} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ is de bij de functie β_ρ behorende reguliere getemperde distributie, dus

$$T_{\beta_\rho}[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \beta_\rho(x, y)\, \phi(x, y)\, dxdy\,,$$

voor willekeurige testfunctie $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$. Bewijs de volgende

Stelling: Als $A(\rho) = \dfrac{1}{\pi\rho^2}$, dan $\lim_{\rho \to 0} T_{\beta_\rho} = \delta$. Hierin is δ de Dirac distributie in de oorsprong.
(*Hint:* Beschouw $\psi(x, y) = \phi(x, y) - \phi(0, 0)$ en gebruik de Hölder ongelijkheid om $T_{\beta_\rho}[\psi]$ af te schatten; maak hierin gebruik van de sup-norm $\|\psi\|_\infty$ van ψ op het effectieve deeldomein van $\mathbb{R}^2$ waarop de integraal feitelijk gedefinieerd is.)

EINDE