TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: vrijdag 17 maart 2006. Tijd: 14:00–17:00. Plaats: SC C.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

(*20*) **1.** Voor een complexwaardig discreet beeld $f : \Omega \subset \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ is de p-norm voor $p \geq 1$ gedefinieerd als

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Hierin is de sommatie-index een tweedimensionale multi-index, $\alpha \in \Omega \subset \mathbb{Z}^2$, en is $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$ een eindige verzameling roosterpunten. De sup-norm is gedefinieerd als volgt:

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \to \infty} \|f\|_p .$$

(5) **a.** Bewijs dat $\|f\|_\infty = \max_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]\,|$ uitgaande van bovenstaande definities.
(*Hint:* Maak een afschatting van de vorm $\ldots \leq \|f\|_p \leq \ldots$ in termen van M en $|\Omega|$, waarin $M = \max_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]\,|$ en waarin $|\Omega|$ het aantal roosterpunten in Ω voorstelt.)

Noem $\max_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]\,| = M$ en schrijf $|\Omega|$ voor het aantal roosterpunten in Ω. Dan geldt

$$M^p \stackrel{*}{\leq} \|f\|_p^p = \sum_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]|^p \stackrel{\star}{\leq} M^p\ |\Omega| \quad \text{dus} \quad M \leq \|f\|_p \leq M\ |\Omega|^{\frac{1}{p}} .$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van het feit dat voor tenminste één roosterpunt, zeg $\alpha^* \in \Omega$, geldt $|f[\alpha^*]| = M$. Bij $\star$ is gebruik gemaakt van de afschatting $|f[\alpha]|^p \leq M^p$ voor elke term $\alpha \in \Omega$. Aangezien $\lim_{p \to \infty} |\Omega|^{1/p} = 1$ volgt uit deze inklemming

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \to \infty} \|f\|_p = M .$$

Gegeven is onderstaand 4×4 beeld.

0	i	–i	–2
2	0	2i	0
3–4i	–1	3	4i
–i	–4	3	3

b. Bepaal hiervan respectievelijk

(5) **b1.** de 1-norm, $\|f\|_1$,

$\|f\|_1 = |0|+|i|+|-i|+|-2|+|2|+|0|+|2i|+|0|+|3-4i|+|-1|+|3|+|4i|+|-i|+|-4|+|3|+|3| = 1+1+2+2+2+5+1+3+4+1+4+3+3 = 32.$

(5) **b2.** de 2-norm, $\|f\|_2$, en

$\|f\|_2^2 = |0|^2+|i|^2+|-i|^2+|-2|^2+|2|^2+|0|^2+|2i|^2+|0|^2+|3-4i|^2+|-1|^2+|3|^2+|4i|^2+|-i|^2+|-4|^2+|3|^2+|3|^2 = 1+1+4+4+4+4+25+1+9+16+1+16+9+9 = 100$, dus $\|f\|_2 = 10$.

(5) **b3.** de sup-norm, $\|f\|_\infty$.

$\|f\|_\infty = \max\{|0|, |i|, |-i|, |-2|, |2|, |0|, |2i|, |0|, |3-4i|, |-1|, |3|, |4i|, |-i|, |-4|, |3|, |3|\} = \max\{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = 5.$

♣

(*20*) **2.** In deze opgave bekijken we de kwadratische vorm, $Q : V \to \mathbb{R}_0^+ : f \mapsto Q(f)$, gegeven door

$$Q(f) = \iint_\Omega \left(f_{xx}^2(x,y) + 2f_{xy}^2(x,y) + f_{yy}^2(x,y) \right) \, dxdy \; ,$$

Hierin is V een lineaire ruimte van functies van het type $f : \Omega \to \mathbb{R}$ waarvoor bovenstaande integraal goed gedefinieerd en onafhankelijk van de integratievolgorde is. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is een begrensd definitiegebied.

We voeren het begrip *seminorm* in, als volgt.

Definitie. Zij U een vectorruimte over $\mathbb{R}$. Een *seminorm* is een niet-negatief definiete afbeelding $\| \, \| : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle $v, w \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:

(i.) $\|v\| \geq 0$,

(ii.) $\|\lambda\, v\| = |\lambda| \, \|v\|$,

(iii.) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

(10) **a.** Toon aan dat $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Q(f)}$ een seminorm van $f \in V$ is door te laten zien dat aan de definiërende voorwaarden is voldaan.
(*Hint:* Ad (iii.) Stel $p, q \geq 0$ en $f, g \in V$. Schrijf $Q(p\,f \pm q\,g) = p^2\,Q(f) + q^2\,Q(g) \pm 2\,p\,q\,R(f,g)$ en leidt een uitdrukking af voor $R(f,g)$ in het rechterlid. Beschouw vervolgens de triviale ongelijkheid $Q\,(p\,f - q\,g) \geq 0$ waarbij je $p = \sqrt{Q(g)}$ en $q = \sqrt{Q(f)}$ kiest.)

(i.) $Q(f) \geq 0$, dus ook $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Q(f)} \geq 0$, voor alle $f \in V$.

(ii.) $\|\lambda\, f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Q(\lambda\, f)} \stackrel{*}{=} \sqrt{\lambda^2\, Q(f)} = |\lambda|\,\sqrt{Q(f)}$. Bij $*$ is gebruik gemaakt van de definitie $(\lambda\, f)(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\, f(x,y)$ en van lineariteit van integreren.

(iii.) De hint volgend vinden we $Q(p\,f \pm q\,g) = p^2\,Q(f) + q^2\,Q(g) \pm 2\,p\,q\,R(f,g)$, waarin

$$R(f,g) = \iint_\Omega \left(f_{xx}(x,y)\,g_{xx}(x,y) + 2 f_{xy}(x,y)\,g_{xy}(x,y) + f_{yy}(x,y)\,g_{yy}(x,y)\right)\,dxdy\,.$$

Substitutie van $p = \sqrt{Q(g)}$ en $q = \sqrt{Q(f)}$ in $Q\,(p\,f - q\,g) \geq 0$ geeft

$$0 \leq Q\left(f\sqrt{Q(g)} - g\sqrt{Q(f)}\right) = 2\,Q(f)\,Q(g) - 2\,R(f,g)\sqrt{Q(f)}\,\sqrt{Q(g)} \quad \text{oftewel} \quad R(f,g) \leq \sqrt{Q(f)}\,\sqrt{Q(g)}\,.$$

Hiermee volgt tenslotte, voor willekeurige $f, g \in V$,

$$\|f+g\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} Q(f+g) = Q(f)+Q(g)+2\,R(f,g) \leq Q(f)+Q(g)+2\sqrt{Q(f)\,Q(g)} = \left(\sqrt{Q(f)} + \sqrt{Q(g)}\right)^2 = (\|f\| + \|g\|)^2\,,$$

m.a.w. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

(10) **b.** Bewijs ook dat $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Q(f)}$ géén echte norm definieert.

Stel $f(x,y) = a+bx+cy$ voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}$ niet gelijktijdig nul, dan geldt $f \in V$ en $f \neq 0$, met $\|f\| = \sqrt{Q(f)} = 0$. Voor functies anders dan de nulfunctie moet echter gelden dat de norm *strict* positief is, hetgeen hier dus niet het geval is.

♣

(*30*) **3.** In deze opgave hanteren we de volgende definitie voor de *discrete Fouriertransformatie* (DFT) van een discreet signaal, $u : \Omega \to \mathbb{R} : \ell \mapsto u[\ell]$, op een ééndimensionaal rooster $\Omega = \{1, \ldots, N\}$ met N roosterpunten:

$$\widehat{u}[k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^{N} u[\ell]\, e^{-2\pi i(k-1)(\ell-1)/N} \quad \text{voor } k = 1, \ldots, N.$$

Bijgevolg geldt voor de inverse DFT:

$$u[\ell] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \widehat{u}[k]\, e^{2\pi i(k-1)(\ell-1)/N} \quad \text{voor } \ell = 1, \ldots, N.$$

We bekijken het volgende concrete voorbeeld:

$$u[\ell] = c^{\ell-1} \quad \text{voor } \ell = 1, \ldots, N,$$

waarin $c>0$, $c\neq 1$, een constante parameter is.

In deze opgave mag je gebruik maken van de *regel van l'Hôpital* voor het berekenen van limieten:

Regel van l'Hôpital. Voor twee differentieerbare functies f en g met $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ geldt

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} ,$$

indien de limiet in het rechterlid bestaat.

(5) **a.** Beschouw de volgende som met N termen: $s = \sum_{\ell=1}^{N} e^{(\ell-1)K}$, $K \in \mathbb{C}$ constant. Je mag aannemen dat K geen veelvoud is van $2\pi i$. Laat zien dat

$$s = \frac{1-e^{NK}}{1-e^{K}} .$$

(*Hint:* Vergelijk de sommen $s = 1 + e^{K} + \ldots + e^{(N-1)K}$ en $e^{K} s = e^{K} + e^{2K} + \ldots + e^{NK}$.)

De hint volgend levert, na subtractie:

$$\begin{array}{lclllllllllll} s & = & 1 & + & e^{K} & + & e^{2K} & + & \ldots & + & e^{(N-1)K} & & \\ e^{K}\, s & = & & & e^{K} & + & e^{2K} & + & \ldots & + & e^{(N-1)K} & + & e^{NK} \\ \hline (1-e^{K})\, s & = & 1 & & & & & & & & & - & e^{NK} \end{array}$$

Hieruit volgt onmiddellijk $s = \dfrac{1-e^{NK}}{1-e^{K}}$ mits $e^{K} \neq 1$. Aan deze laatste voorwaarde is voldaan omdat $K \neq k\, 2\pi i$ voor een of andere $k \in \mathbb{Z}$.

(5) **b.** Toon aan dat $e^{2\pi i \zeta} = 1$ voor alle $\zeta \in \mathbb{Z}$.

Uit $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$, $\phi \in [0, 2\pi)$, volgt dat $e^{2\pi i\zeta} = \cos(2\pi\zeta) + i\sin(2\pi\zeta) = 1$ voor alle $\zeta \in \mathbb{Z}$.

(10) **c.** Leid een expliciete formule af voor $\widehat{u}[k]$ (dus niet in termen van een reeksontwikkeling). (*Hint:* Gebruik voorgaande onderdelen.)

$\widehat{u}[k] = \sum_{\ell=1}^{N} u[\ell]\, e^{-2\pi i(k-1)(\ell-1)/N} = \sum_{\ell=1}^{N} c^{\ell-1}\, e^{-2\pi i(k-1)(\ell-1)/N} \stackrel{*}{=} \sum_{\ell=1}^{N} e^{(\ell-1)(\ln c - 2\pi i(k-1)/N)}$. Bij $*$ is gebruik gemaakt van de identiteit $c = e^{\ln c}$. Identificeren we $\ln c - 2\pi i(k-1)/N \equiv K$ dan kunnen we de resultaten van onderdeel a en b gebruiken: Resultaat:

$$\widehat{u}[k] = \sum_{\ell=1}^{N} e^{(\ell-1)K} = \frac{1-e^{NK}}{1-e^{K}} \stackrel{*}{=} \frac{1-c^{N}}{1-c\, e^{-2\pi i(k-1)/N}} .$$

Bij $*$ is wederom gebruik gemaakt van $c = e^{\ln c}$ en van onze definitie van K.

(10) **d.** Hieronder analyseren we het limietgedrag voor $c \to 1$. Bewijs hiertoe de stelling dat

$$\lim_{c\to 1} \widehat{u}[k] = \begin{cases} N & \text{als } k=1 \\ 0 & \text{als } k\neq 1. \end{cases}$$

(*Hint:* Beschouw de gevallen $k=1$ en $k=2,\ldots,N$ apart.)

Als $k = 2, \ldots, N$ geldt dat $\lim_{c \to 1} \widehat{u}[k] = \lim_{c \to 1} \dfrac{1 - c^N}{1 - c\, e^{-2\pi i (k-1)/N}} = 0$ (teller gaat in de limiet naar nul, noemer niet). Als $k = 1$ hebben we $\lim_{c \to 1} \widehat{u}[1] = \lim_{c \to 1} \dfrac{1 - c^N}{1 - c} \stackrel{*}{=} \lim_{c \to 1} \dfrac{-N\, c^{N-1}}{-1} = N$. Bij $*$ is de regel van l'Hôpital toegepast.

♣

(*30*) **4.** We beschouwen de functieverzameling $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ van alle zogenaamde Schwartz functies. Voor functies $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ geldt dat ze Fouriertransformeerbaar zijn, met $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie:

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, f(x)\, dx\,.$$

(5) **a.** Stel $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ is een oneven functie, d.w.z. $f(x) = -f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Laat zien dat in dat geval geldt dat $\widehat{f}(0) = 0$.

We hebben

$$\widehat{f}(0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \stackrel{*}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\, dx \stackrel{\star}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \stackrel{\text{def}}{=} -\widehat{f}(0)\,.$$

Bij $*$ is antisymmetrie van f gebruikt, bij $\star$ substitutie van variabele $x = -y$. De overige vergelijkingen volgen uit de definitie van Fouriertransformatie. Hieruit volgt $\widehat{f}(0) = 0$.

Voorts voeren we op $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de volgende vorm in:

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, dx\,.$$

Hierin is $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$ het convolutieprodukt van f en g.

Voor convolutieproducten geldt de zogenaamde *ongelijkheid van Young*:

Lemma. Zij $1 \le p, q \le \infty$, met $1/p + 1/q \ge 1$, en zij $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, dan geldt

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p\, \|g\|_q \quad \text{waarin } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

(5) **b.** Gebruik de ongelijkheid van Young om aan te tonen dat $|\langle f|g\rangle| < \infty$ voor alle $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Er geldt

$$|\langle f|g\rangle| \stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)\, dx \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(x)|\, dx \stackrel{\text{def}}{=} \|f*g\|_1 \stackrel{*}{\le} \|f\|_1\, \|g\|_1 \stackrel{\star}{<} \infty\,.$$

Bij $*$ is de ongelijkheid van Young toegepast, met $p = q = r = 1$. Bij $\star$ is gebruik gemaakt van de inclusie $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, d.w.z. een Schwartz functie is altijd een L^1-functie.

(10) **c.** Laat zien dat $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\, dx = \widehat{f}(0)\, \widehat{g}(0)$.

Uit $(\widehat{f * g})(\omega) = \widehat{f}(\omega)\,\widehat{g}(\omega)$ voor alle $\omega \in \mathbb{R}$ volgt in het bijzonder $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{f * g})(0) = \widehat{f}(0)\,\widehat{g}(0)$.

d. We gaan nu controleren of $\langle f|g\rangle$ een reëel inprodukt definieert. Beantwoord hiertoe de volgende vragen.

$(2\frac{1}{2})$ **d1.** Bewijs lineariteit met betrekking tot het eerste argument: $\langle \lambda f + \mu g|h\rangle = \lambda\langle f|h\rangle + \mu\langle g|h\rangle$ voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $f, g, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Kies $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $f, g, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ willekeurig. Dan geldt

$$\begin{aligned}\langle \lambda f + \mu g|h\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} ((\lambda f + \mu g) * h)\,(x)\,dx \stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,(f * h)(x) + \mu\,(g * h)(x)\,dx \stackrel{\star}{=} \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (f * h)(x)\,dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} (g * h)(x)\,dx \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda\langle f|h\rangle + \mu\langle g|h\rangle\,.\end{aligned}$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van lineariteit van het convolutieprodukt ten aanzien van de eerste factor en bij $\star$ van lineariteit van integreren.

$(2\frac{1}{2})$ **d2.** Bewijs symmetrie: $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle$ voor alle $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Dit volgt rechtstreeks uit commutativiteit van het convolutieprodukt: $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (g*f)(x)\,dx = \langle g|f\rangle$, of ook, met behulp van c, uit commutativiteit van de gewone vermenigvuldiging: $\langle f|g\rangle = \widehat{f}(0)\,\widehat{g}(0) = \widehat{g}(0)\,\widehat{f}(0) = \langle g|f\rangle$.

$(2\frac{1}{2})$ **d3.** Geldt $\langle f|f\rangle \geq 0$ voor alle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$?

Kies $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ willekeurig, dan geldt $\langle f|f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (f*f)(x)\,dx \stackrel{*}{=} \left(\widehat{f}(0)\right)^2$. Dit is $\mathbb{C}$-waardig en dus niet noodzakelijkerwijs positief! Bij $*$ is wederom onderdeel c gebruikt.

$(2\frac{1}{2})$ **d4.** Is de nulfunctie de enige functie in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ waarvoor $\langle f|f\rangle = 0$?

Nee, er bestaan niet-triviale functies $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ waarvoor $\langle f|f\rangle = 0$. Dit volgt uit a en c: Iedere antisymmetrische Schwartz functie f geeft $\langle f|f\rangle \stackrel{\text{c}}{=} \left(\widehat{f}(0)\right)^2 \stackrel{\text{a}}{=} 0$. Een voorbeeld is $f(x) = x\,e^{-x^2}$. Uit d3/d4 volgt dat de bilineaire vorm geen reëel inprodukt is.

EINDE