

TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: vrijdag 17 maart 2006. Tijd: 14:00–17:00. Plaats: SC C.

Lees dit vóóordat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je uitgewerkte opgaven (géén kladpapier!) en bijlage persoonlijk bij de surveillanten in.
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan. Notaties en definities in het dictaat kunnen afwijken van die in dit tentamen.

VEEL SUCCES!

- (20) **1.** Voor een complexwaardig discreet beeld $f : \Omega \subset \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ is de p -norm voor $p \geq 1$ gedefinieerd als

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hierin is de sommatie-index een tweedimensionale multi-index, $\alpha \in \Omega \subset \mathbb{Z}^2$, en is $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$ een eindige verzameling roosterpunten. De sup-norm is gedefinieerd als volgt:

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

- (5) **a.** Bewijs dat $\|f\|_\infty = \max_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]|$ uitgaande van bovenstaande definities.
(*Hint:* Maak een afschatting van de vorm $\dots \leq \|f\|_p \leq \dots$ in termen van M en $|\Omega|$, waarin $M = \max_{\alpha \in \Omega} |f[\alpha]|$ en waarin $|\Omega|$ het aantal roosterpunten in Ω voorstelt.)

Gegeven is onderstaand 4×4 beeld.

0	i	-i	-2
2	0	2i	0
3-4i	-1	3	4i
-i	-4	3	3

b. Bepaal hiervan respectievelijk

- (5) **b1.** de 1-norm, $\|f\|_1$,
- (5) **b2.** de 2-norm, $\|f\|_2$, en
- (5) **b3.** de sup-norm, $\|f\|_\infty$.



(20) **2.** In deze opgave bekijken we de kwadratische vorm, $Q : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : f \mapsto Q(f)$, gegeven door

$$Q(f) = \iint_{\Omega} \left(f_{xx}^2(x, y) + 2f_{xy}^2(x, y) + f_{yy}^2(x, y) \right) dx dy ,$$

Hierin is V een lineaire ruimte van functies van het type $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor bovenstaande integraal goed gedefinieerd en onafhankelijk van de integratievolgorde is. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is een begrensde definitiegebied.

We voeren het begrip *seminorm* in, als volgt.

Definitie. Zij U een vectorruimte over \mathbb{R} . Een *seminorm* is een niet-negatief definitieve afbeelding $\| \cdot \| : U \rightarrow \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle $v, w \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:

- (i.) $\|v\| \geq 0$,
 - (ii.) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$,
 - (iii.) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.
- (10) **a.** Toon aan dat $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Q(f)}$ een seminorm van $f \in V$ is door te laten zien dat aan de definiërende voorwaarden is voldaan.
(*Hint:* Ad (iii.) Stel $p, q \geq 0$ en $f, g \in V$. Schrijf $Q(pf \pm qg) = p^2 Q(f) + q^2 Q(g) \pm 2pq R(f, g)$ en leidt een uitdrukking af voor $R(f, g)$ in het rechterlid. Beschouw vervolgens de triviale ongelijkheid $Q(pf - qg) \geq 0$ waarbij je $p = \sqrt{Q(g)}$ en $q = \sqrt{Q(f)}$ kiest.)
- (10) **b.** Bewijs ook dat $\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{Q(f)}$ géén echte norm definieert.



(30) **3.** In deze opgave hanteren we de volgende definitie voor de *discrete Fouriertransformatie* (DFT) van een discreet signaal, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \ell \mapsto u[\ell]$, op een ééndimensionaal rooster $\Omega = \{1, \dots, N\}$ met N roosterpunten:

$$\hat{u}[k] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=1}^N u[\ell] e^{-2\pi i(k-1)(\ell-1)/N} \quad \text{voor } k = 1, \dots, N.$$

Bijgevolg geldt voor de inverse DFT:

$$u[\ell] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{u}[k] e^{2\pi i(k-1)(\ell-1)/N} \quad \text{voor } \ell = 1, \dots, N.$$

We bekijken het volgende concrete voorbeeld:

$$u[\ell] = c^{\ell-1} \quad \text{voor } \ell = 1, \dots, N,$$

waarin $c > 0$, $c \neq 1$, een constante parameter is.

In deze opgave mag je gebruik maken van de *regel van l'Hôpital* voor het berekenen van limieten:

Regel van l'Hôpital. Voor twee differentieerbare functies f en g met $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ geldt

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

indien de limiet in het rechterlid bestaat.

- (5) **a.** Beschouw de volgende som met N termen: $s = \sum_{\ell=1}^N e^{(\ell-1)K}$, $K \in \mathbb{C}$ constant. Je mag aannemen dat K geen veelvoud is van $2\pi i$. Laat zien dat

$$s = \frac{1 - e^{NK}}{1 - e^K}.$$

(*Hint:* Vergelijk de sommen $s = 1 + e^K + \dots + e^{(N-1)K}$ en $e^K s = e^K + e^{2K} + \dots + e^{NK}$.)

- (5) **b.** Toon aan dat $e^{2\pi i \zeta} = 1$ voor alle $\zeta \in \mathbb{Z}$.
- (10) **c.** Leid een expliciete formule af voor $\hat{u}[k]$ (dus niet in termen van een reeksontwikkeling). (*Hint:* Gebruik voorgaande onderdelen.)
- (10) **d.** Hieronder analyseren we het limietgedrag voor $c \rightarrow 1$. Bewijs hiertoe de stelling dat

$$\lim_{c \rightarrow 1} \hat{u}[k] = \begin{cases} N & \text{als } k=1 \\ 0 & \text{als } k \neq 1. \end{cases}$$

(*Hint:* Beschouw de gevallen $k=1$ en $k=2, \dots, N$ apart.)



- (30) **4.** We beschouwen de functieverzameling $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ van alle zogenaamde Schwartz functies. Voor functies $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ geldt dat ze Fouriertransformeerbaar zijn, met $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

- (5) **a.** Stel $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ is een oneven functie, d.w.z. $f(x) = -f(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Laat zien dat in dat geval geldt dat $\widehat{f}(0) = 0$.

Voorts voeren we op $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de volgende vorm in:

$$\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) dx.$$

Hierin is $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy$ het convolutieprodukt van f en g .

Voor convolutieproducten geldt de zogenaamde *ongelijkheid van Young*:

Lemma. Zij $1 \leq p, q \leq \infty$, met $1/p + 1/q \geq 1$, en zij $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, dan geldt

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{waarin} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

- (5) **b.** Gebruik de ongelijkheid van Young om aan te tonen dat $|\langle f|g \rangle| < \infty$ voor alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- (10) **c.** Laat zien dat $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) dx = \widehat{f}(0) \widehat{g}(0)$.

d. We gaan nu controleren of $\langle f|g \rangle$ een reëel inproduct definieert. Beantwoord hiertoe de volgende vragen.

- (2 $\frac{1}{2}$) **d1.** Bewijs lineariteit met betrekking tot het eerste argument: $\langle \lambda f + \mu g|h \rangle = \lambda \langle f|h \rangle + \mu \langle g|h \rangle$ voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- (2 $\frac{1}{2}$) **d2.** Bewijs symmetrie: $\langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle$ voor alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- (2 $\frac{1}{2}$) **d3.** Geldt $\langle f|f \rangle \geq 0$ voor alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

- (2 $\frac{1}{2}$) **d4.** Is de nulfunctie de enige functie in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ waarvoor $\langle f|f \rangle = 0$? Concludeer of we te maken hebben met een reëel inproduct of niet.

EINDE