

TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

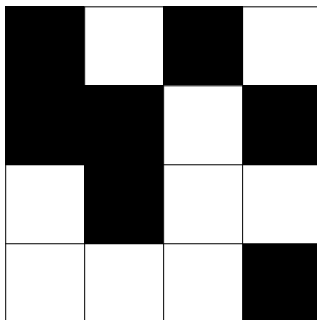
Vakcode: 8D020. Datum: Vrijdag 21 maart 2003. Tijd: 14.00–17.00 uur. Plaats: VRT 03H04.

Lees dit vóóordat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

- (25) **1.** Onderstaande figuur toont een binair beeld opgebouwd uit 16 pixels, waarvan zeven zwarte en negen witte. Een zwart pixel heeft numerieke waarde 0, een wit pixel 1. In je antwoorden op onderstaande vragen hoef je eventuele uitdrukkingen met faculteiten en/of binomiaalcoëfficiënten getalsmatig niet verder uit te werken.



- a.** In dit onderdeel gaan we ervan uit dat beelden een eenduidig gekozen oorsprong en oriëntatie bezitten. Met andere woorden, bovenstaand beeld is onderscheidbaar van dat welk ontstaat wanneer we het een kwart slag draaien.
- (2 $\frac{1}{2}$) **a1.** Hoeveel onderscheidbare 4×4 beelden zijn er met precies zeven zwarte en negen witte pixels?

Het aantal onderscheidbare manieren waarop je precies zeven (negen) van de 16 pixels zwart (wit) kunt kleuren bedraagt $\binom{16}{7} (= \binom{16}{9}) = 11\,440$.

- (2 $\frac{1}{2}$) **a2.** Beschouw de verzameling van alle binaire 4×4 beelden. Wat is de a priori kans dat je bij

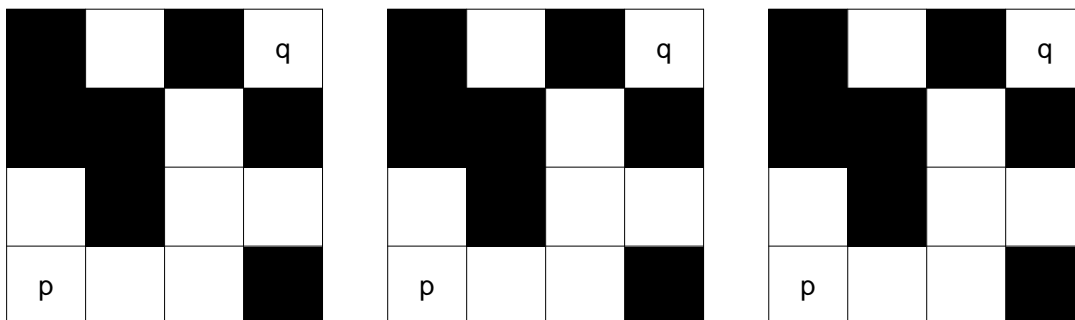
aselecte keuze precies bovenstaand beeld aantreft?

Het totale aantal onderscheidbare binaire 4×4 beelden bedraagt $2^{16} = 65\,536$. De a priori kans om één specifieke realisatie aan te treffen bedraagt derhalve $2^{-16} = 1/65\,536 \approx 0.0000152588$.

b. De witte pixels p en q , aangegeven in onderstaande figuren, heten *verbonden* (“connected”) indien het mogelijk is ze middels een digitaal pad bestaande uit enkel witte pixels met elkaar te verbinden. Opeenvolgende pixels op het pad moeten voldoen aan een goed gedefiniëerd “adjacency” criterium. In deze opgave beschouwen we “4-adjacency”, “8-adjacency” en “mixed-adjacency” zoals uitgelegd in § 1.5.2 van het dictaat.

Geef in elk van de onderstaande figuren aan of het mogelijk is om een digitaal pad van p naar q te trekken en zo ja, teken het *kortste* pad, in geval van achtereenvolgens (zie bijlage aan het eind van dit tentamen):

- ($2\frac{1}{2}$) **b1.** “4-adjacency” (linker figuur),
- ($2\frac{1}{2}$) **b2.** “8-adjacency” (middelste figuur), respectievelijk
- ($2\frac{1}{2}$) **b3.** “mixed-adjacency” (rechter figuur).



Noemen we het pad van p naar q in de onderdelen **b1**–**b3** respectievelijk γ_1 , γ_2 en γ_3 , en hanteren we een coördinatenstelsel waarbij het pixel p coördinaten $(1, 1)$ heeft en pixel q coördinaten $(4, 4)$, dan geldt respectievelijk dat $\gamma_1 = \emptyset$ (pixel q is niet verbonden met zijn diagonaalbuur), $\gamma_2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ en $\gamma_3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.

c. We definiëren de p -norm van een $M \times N$ ($M, N \in \mathbb{N}$) binair beeld f voor $p \geq 1$ en voor $p = \infty$ als volgt:

$$\|f\|_p = \frac{1}{MN} \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |f[i, j]|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{resp.} \quad \|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

Let op: De definitie wijkt enigszins af van die in het dictaat!

Bereken voor bovenstaand binaire beeld achtereenvolgens

- ($2\frac{1}{2}$) **c1.** de 1-norm,

(2 $\frac{1}{2}$) **c2.** de 2-norm,

(2 $\frac{1}{2}$) **c3.** de ∞ -norm.

De definitie van de p -norm kan voor een binair beeld geschreven worden als $\|f\|_p = (\#f)^{1/p}/(MN)$ voor $p \geq 1$, waarin $\#f$ staat voor het aantal pixels met numerieke waarde 1. Voorts geldt voor $f \neq 0$ dat $\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} (\#f)^{1/p}/(MN) = 1/(MN)$, ongeacht het beeld. Uiteraard is $\|f\|_\infty = 0$ dan en slechts dan als $f = 0$. Derhalve geldt in het bijzonder voor bovenstaand beeld $\|f\|_1 = 9/16 = 3/4$, $\|f\|_2 = \sqrt{9}/16 = 3/16$ en $\|f\|_\infty = 1/16$.

d. Bewijs dat voor willekeurige binaire $M \times N$ beelden f geldt

(2 $\frac{1}{2}$) **d1.** $\|f\|_p \leq 1$ voor alle $p \geq 1$ en

(2 $\frac{1}{2}$) **d2.** $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ dan en slechts dan als $p \geq q$.

Zie vorig onderdeel: $\|f\|_p = (\#f)^{1/p}/(MN)$. Met $0 \leq \#f \leq MN$ volgt dus $0 \leq \|f\|_p \leq (MN)^{1/p-1} \leq 1$, aangezien $MN \geq 1$ en $1/p - 1 \leq 0$. Voorts, stel $p \geq q \geq 1$ en $f \neq 0$, dan is $\|f\|_p/\|f\|_q = (\#f)^{1/p-1/q} \leq 1$, aangezien $\#f > 0$ en $1/p - 1/q \leq 0$. Het omgekeerde geldt ook: Als $\|f\|_p/\|f\|_q = (\#f)^{1/p-1/q} \leq 1$, dan volgt noodzakelijkerwijs $1/p - 1/q \leq 0$, oftewel $p \geq q$. Het geval $f = 0$ is evident. (De stelling geldt overigens ook in de limiet waarin we p en eventueel q naar oneindig laten gaan.)



(20) **2.** Beschouw voor gegeven $\epsilon \in \mathbb{R}$ de afbeelding $A : C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$A(f) = f(0) + \epsilon f''(0).$$

In deze opgave mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(5) **a.** Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

Stel $f, g \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dan geldt $A(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(0) + \epsilon(\lambda f + \mu g)''(0) = \lambda(f(0) + \epsilon f''(0)) + \mu(g(0) + \epsilon g''(0)) = \lambda A(f) + \mu A(g)$.

b. We voorzien domein en bereik van de operator A van een input- respectievelijk outputnorm, als volgt. Voor het domein, d.i. $C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, kiezen we de gebruikelijke 1-norm:

$$\|f\|_{\text{input}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad \left(f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \right).$$

Het bereik van A , d.i. \mathbb{R} , voorzien we van de gebruikelijke modulus-norm voor reële getallen:

$$\|z\|_{\text{output}} = |z| \quad (z \in \mathbb{R}).$$

We beschouwen als voorbeeld $f(x) = \exp\left[-\frac{1}{\epsilon}x^2\right]$ met $\epsilon > 0$ een constante. Bepaal

(5) **b1.** $\|f\|_{\text{input}}$, evenals

(5) **b2.** $\|A(f)\|_{\text{output}}$.

$\|f\|_{\text{input}} = \sqrt{\pi\epsilon}$ (dit volgt onmiddellijk uit de gegeven standaardintegraal middels substitutie van variabelen: $x = y\sqrt{\epsilon}$), dus $f \in L^1(\mathbb{R})$. De exponentiële functie is analytisch, dus geldt zeker $f \in C^2(\mathbb{R})$, kortom $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Verder geldt $|A(f)| = |f(0) + \epsilon f''(0)| = \left|1 + \epsilon \left[(4x^2/\epsilon^2 - 2/\epsilon) \exp(-x^2/\epsilon) \right]_{x=0}\right| = |1 - 2| = 1$.

(5) **c.** Bewijs dat de operator A “slecht-gesteld” is door aan te tonen dat $\|f\|_{\text{input}} \rightarrow 0$ niet impliceert dat $\|A(f)\|_{\text{output}} \rightarrow 0$.

Zie **b** voor een tegenvoorbeeld: $\|f\|_{\text{input}} = \sqrt{\pi\epsilon} \rightarrow 0$ als $\epsilon \rightarrow 0$, maar $\|A(f)\|_{\text{output}} = 1$ constant. De output gaat dus niet naar nul, terwijl de input dat wel doet, dus de operator A is slecht-gesteld.



(30) **3.** Beschouw de veeltermfuncties $f_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1$, $f_2 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ en $f_3 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2 - c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een constante parameter. We voorzien het opspansel van deze functies, $V \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{f_1, f_2, f_3\}$, als volgt van een inproduct: Als $f, g \in V$, dan $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$.

(2 $\frac{1}{2}$) **a1.** Laat zien dat elke tweedegraads functie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ van de vorm $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ geschreven kan worden als lineaire combinatie van de functies f_1 , f_2 en f_3 , ongeacht de waarde van c .

(2 $\frac{1}{2}$) **a2.** Bewijs dat de functies f_1 , f_2 en f_3 lineair onafhankelijk zijn ongeacht de waarde van c .

Ad **a1**: Stel $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$, dus $Ax^2 + Bx + C = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3(3x^2 - c) = 3\alpha_3 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1 - \alpha_3 c$ voor alle $x \in [-1, 1]$. Hieruit volgt onmiddellijk dat $3\alpha_3 = A$, $\alpha_2 = B$ en $\alpha_1 - \alpha_3 c = C$, dus $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (C + Ac/3, B, A/3)$. Met andere woorden, f is altijd als lineaire combinatie van f_1 , f_2 en f_3 te schrijven, ongeacht de waarde van c . Voor **a2** nemen we in het bijzonder $f = 0$, hetgeen equivalent is met $A = B = C = 0$, oftewel $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Ook dit geldt ongeacht de waarde van c .

(5) **b.** Toon aan dat $\{f_1, f_2, f_3\}$ orthogonaal is dan en slechts dan als $c = 1$.

Hiervoor moeten we alle inproducten van de vorm $\langle f_i|f_j \rangle$ voor $i, j = 1, 2, 3$, $i > j$, inspecteren. Er geldt $\langle f_1|f_2 \rangle = \langle f_2|f_3 \rangle = 0$, aangezien f_1 en f_3 even functies zijn, terwijl f_2 oneven is. Resteert het inproduct $\langle f_1|f_3 \rangle = \int_{-1}^1 f_1(x)f_3(x) dx = \int_{-1}^1 3x^2 - c dx = [x^3 - cx]_{x=-1}^{x=1} = 2(1 - c) = 0$ dan en slechts dan als $c = 1$.

(5) **c.** Neem voortaan $c = 1$. Stel $g_1 = \lambda_1 f_1$, $g_2 = \lambda_2 f_2$ en $g_3 = \lambda_3 f_3$ voor zekere constanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Bepaal de waarden van deze constanten als gegeven is dat $\{g_1, g_2, g_3\}$ een orthonormaal stelsel vormt.

Hiervoor hebben we de inproducten $\langle f_i|f_i \rangle$ nodig voor $i = 1, 2, 3$: $\langle f_1|f_1 \rangle = \int_{-1}^1 f_1^2(x) dx = \int_{-1}^1 dx = 2$, $\langle f_2|f_2 \rangle = \int_{-1}^1 f_2^2(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3$ en $\langle f_3|f_3 \rangle = \int_{-1}^1 f_3^2(x) dx = \int_{-1}^1 (3x^2 - 1)^2 dx = \int_{-1}^1 9x^4 - 6x^2 + 1 dx = 8/5$. Stellen we $1 = \|g_i\| = \sqrt{\langle g_i|g_i \rangle} = \lambda_i \sqrt{\langle f_i|f_i \rangle}$ voor elke $i = 1, 2, 3$, dan volgt hieruit dat $\lambda_1 = 1/\sqrt{\langle f_1|f_1 \rangle} = \sqrt{2}/2$, $\lambda_2 =$

$$1/\sqrt{\langle f_2|f_2 \rangle} = \sqrt{6}/2 \text{ en } \lambda_3 = 1/\sqrt{\langle f_3|f_3 \rangle} = \sqrt{10}/4.$$

d. Beschouw de differentiaaloperator $S : V \rightarrow V : f \mapsto S(f)$ gegeven door $S(f)(x) = x \frac{df(x)}{dx}$.

(5) **d1.** Bewijs dat S een lineaire afbeelding is.

(2 $\frac{1}{2}$) **d2.** Bepaal de matrix \mathbf{S} behorende bij de operator S ten opzichte van de basis $\{f_1, f_2, f_3\}$. Dat wil zeggen, als $p = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ en $q = S(p) = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3$, bepaal dan de matrix die de coördinatenvectoren van p en q relateert volgens

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

(2 $\frac{1}{2}$) **d3.** Bewijs dat S singulier is, dat wil zeggen dat de beeldruimte van S een lagere dimensie heeft dan het domein.

(5) **d4.** Laat zien dat S geen projectie is, maar dat er een lineaire deelruimte van V bestaat waarbinnen S , beperkt tot die deelruimte, wel een projectie definiëert. Bepaal de maximale deelruimte waarvoor dit het geval is.

Ad **d1**: $S(\lambda f + \mu g)(x) = x(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda x f'(x) + \mu x g'(x) = \lambda S(f)(x) + \mu S(g)(x)$ voor alle $x \in [-1, 1]$, dus $S(\lambda f + \mu g) = \lambda S(f) + \mu S(g)$. Ad **d2**: De kolommen van \mathbf{S} bevatten de coördinatenrijtjes behorende bij $S(f_1)$, $S(f_2)$, respectievelijk $S(f_3)$. Nu is $S(f_1)(x) = 0 = 0 f_1(x) + 0 f_2(x) + 0 f_3(x)$, $S(f_2)(x) = 0 f_1(x) + 1 f_2(x) + 0 f_3(x)$ en $S(f_3)(x) = 6x^2 = 2(3x^2 - c) + 2c = 2c f_1(x) + 0 f_2(x) + 2 f_3(x)$. Conclusie:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ad **d3**: S beeldt de constante functie af op de nulfunctie, dus de nulruimte heeft tenminste dimensie één en derhalve kan de beeldruimte hooguit dimensie twee hebben. Als alternatief kun je kijken naar de bijbehorende matrix \mathbf{S} . Aan de eerste kolom zie je dat die singulier is. Ad **d4**: Beschouw een willekeurig tweedegraads polynoom p : $S(S(p))(x) = x(xf'(x))' = x(f'(x) + xf''(x)) = xf'(x) + x^2 f''(x) \neq S(p)(x)$; de tweede orde term hierin is in het algemeen niet nul, dus S is geen projectie op het volledige opspannel van f_1 , f_2 en f_3 . Op de deelruimte opgespannen door f_1 en f_2 is S wel een projectie, omdat dan geldt $f'' = 0$, waardoor $S \circ S = S$. Dit is tevens de maximale deelruimte. Als alternatief kun je kijken naar de matrixrepresentatie: $\mathbf{S}^2 \neq \mathbf{S}$, dus \mathbf{S} is geen projectiematrix. Voor de 2×2 deelmatrix linksboven, zeg \mathbf{T} , geldt echter trivialeter wel $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}$.

⊙

(25) **4.** In deze opgave beschouwen we een synthetisch signaal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gedefiniëerd als volgt:

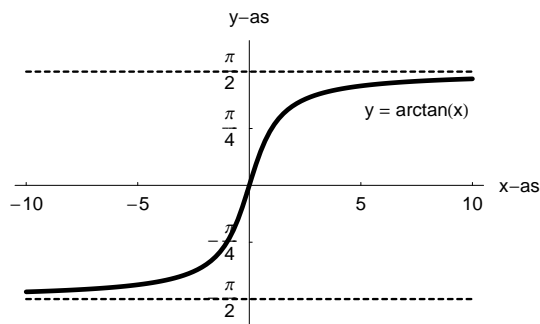
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Verder definiëren we het zogenaamde Poisson filter $\phi_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ voor $\sigma > 0$ als

$$\phi_\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{x^2 + \sigma^2}.$$

Bij deze opgave mag je gebruik maken van de volgende standaardformules (zie ook onderstaande grafiek):

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}.$$



Verder hanteren we in deze opgave de volgende Fourierconventie:

$$\hat{u}(\omega) = \mathcal{F}(u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x) dx \quad \text{en dus} \quad u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega) d\omega.$$

(2 $\frac{1}{2}$) **a.** Toon aan dat $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\sigma}(x) dx = 1$ ongeacht de waarde van σ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\sigma}(x) dx = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \sigma^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{1}{\pi} [\arctan y]_{y \rightarrow -\infty}^{y \rightarrow +\infty} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1. \quad \text{Hierin is de volgende substitutie van variabelen toegepast: } y = x/\sigma.$$

(2 $\frac{1}{2}$) **b1.** Bewijs dat voor willekeurige, voldoende gladde, integreerbare filters ϕ geldt:

$$(f * \phi)(x) = \int_{-\infty}^x \phi(\xi) d\xi.$$

$$(f * \phi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \phi(x-y) dy = \int_0^{\infty} \phi(x-y) dy = \int_{-\infty}^x \phi(\xi) d\xi. \quad \text{In de laatste stap is substitutie van variabelen, } \xi = x-y, \text{ toegepast.}$$

(2 $\frac{1}{2}$) **b2.** Laat door expliciete berekening zien dat het convolutieprodukt $f * \phi_{\sigma}$ gegeven wordt door

$$(f * \phi_{\sigma})(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\sigma}.$$

$$(f * \phi_{\sigma})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \phi_{\sigma}(x-y) dy = \frac{\sigma}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2 + \sigma^2} dy = \int_{-\infty}^{x/\sigma} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = \frac{1}{\pi} [\arctan \xi]_{\xi \rightarrow -\infty}^{\xi = x/\sigma} = \frac{1}{\pi} \left(\arctan \frac{x}{\sigma} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{\sigma}. \quad \text{Hierin is de volgende substitutie van variabelen toegepast: } \xi = (x-y)/\sigma. \quad \text{Gebruik van onderdeel b1 leidt uiteraard tot hetzelfde resultaat.}$$

(5) **c.** Toon aan dat de Fouriergetransformeerde $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ van f gegeven wordt door

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega}.$$

Hint: Uit onderdeel **b1** volgt dat $\frac{d}{dx}(f * \phi)(x) = \phi(x)$. Pas hier Fouriertransformatie op toe.

Uit $\frac{d}{dx}(f * \phi_\sigma)(x) = \phi_\sigma(x)$ volgt dat $\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}(f * \phi_\sigma)\right)(\omega) = \mathcal{F}(\phi_\sigma)(\omega)$. Met behulp van Result 6 op blz. 97 en Theorem 17 op blz. 104 volgt dat dit equivalent is met $i\omega\mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(\phi_\sigma)(\omega) = \mathcal{F}(\phi_\sigma)(\omega)$. Ervan uitgaand dat $\mathcal{F}(\phi_\sigma)(\omega) \neq 0$ voor (bijna) alle ω concluderen we dat $\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{i\omega}$.

d. Zonder bewijs geven we hier de Fouriergetransformeerde $\widehat{\phi}_\sigma = \mathcal{F}(\phi_\sigma)$ van ϕ_σ :

$$\widehat{\phi}_\sigma(\omega) = e^{-\sigma|\omega|}.$$

(2 $\frac{1}{2}$) **d1.** Verklaar het gedrag van $\widehat{\phi}_\sigma(\omega)$ voor $\omega \rightarrow 0$ in termen van eigenschappen van het bijbehorende spatiële filter $\phi_\sigma(x)$. Hint: Vergelijk onderdeel **a**.

(2 $\frac{1}{2}$) **d2.** Verklaar het gedrag van $\widehat{f}(\omega)$ voor $\omega \rightarrow 0$ in termen van eigenschappen van het bijbehorende spatiële signaal $f(x)$.

Zie de definitie van $\widehat{u}(\omega)$: Indien $\widehat{u}(0)$ bestaat dan moet hiervoor kennelijk gelden $\widehat{u}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx$. Dit verklaart zowel het gedrag van $\widehat{\phi}_\sigma(\omega)$ als van $\widehat{f}(\omega)$ voor $\omega \rightarrow 0$: $\widehat{\phi}_\sigma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(x) dx = 1$ (zie **a**), terwijl $\widehat{f}(0)$ niet bestaat omdat $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} dx$ niet convergeert.

(5) **e.** Bepaal het functievoorschrift van de functie $\mathcal{F}(f * \phi_\sigma)$.

Noteren we gemakshalve $f_\sigma = f * \phi_\sigma$ dan geldt hiervoor in de gehanteerde Fourierconventie $\widehat{f}_\sigma = \mathcal{F}(f * \phi_\sigma) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(\phi_\sigma) = \widehat{f}\widehat{\phi}_\sigma$, dus $\widehat{f}_\sigma(\omega) = \frac{1}{i\omega} e^{-\sigma|\omega|}$.

(2 $\frac{1}{2}$) **f.** Toon aan dat $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f * \phi_\sigma = f$. Hint: Neem de “Fourierroute”.

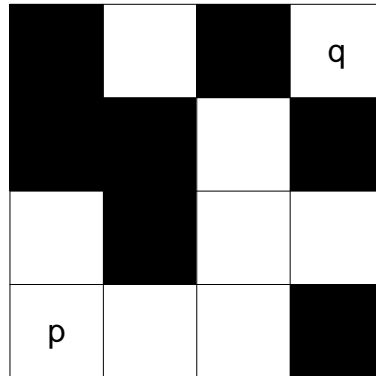
Schrijf wederom $f_\sigma = f * \phi_\sigma$. Uit **e** blijkt dat in het Fourierdomein geldt $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \widehat{f}_\sigma(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{i\omega} e^{-\sigma|\omega|} = \frac{1}{i\omega} = \widehat{f}(\omega)$, dus volgt $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x) = f(x)$.

EINDE

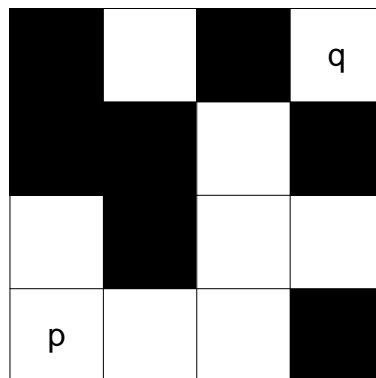
BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam:

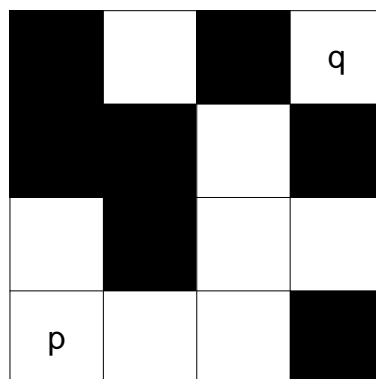
Studentnummer:



Figuur 1: Kortste pad van p naar q middels “4-adjacency”.



Figuur 2: Kortste pad van p naar q middels “8-adjacency”.



Figuur 3: Kortste pad van p naar q middels “mixed-adjacency”.