TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

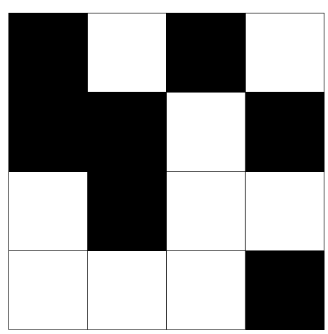
Vakcode: 8D020. Datum: Vrijdag 21 maart 2003. Tijd: 14.00–17.00 uur. Plaats: VRT 03H04.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*25*) **1.** Onderstaande figuur toont een binair beeld opgebouwd uit 16 pixels, waarvan zeven zwarte en negen witte. Een zwart pixel heeft numerieke waarde 0, een wit pixel 1. In je antwoorden op onderstaande vragen hoef je eventuele uitdrukkingen met faculteiten en/of binomiaalcoëfficiënten getalsmatig niet verder uit te werken.



a. In dit onderdeel gaan we ervan uit dat beelden een eenduidig gekozen oorsprong en oriëntatie bezitten. Met andere woorden, bovenstaand beeld is onderscheidbaar van dat welk ontstaat wanneer we het een kwart slag draaien.

($2\frac{1}{2}$) **a1.** Hoeveel onderscheidbare 4×4 beelden zijn er met precies zeven zwarte en negen witte pixels?

($2\frac{1}{2}$) **a2.** Beschouw de verzameling van alle binaire 4×4 beelden. Wat is de a priori kans dat je bij aselecte keuze precies bovenstaand beeld aantreft?

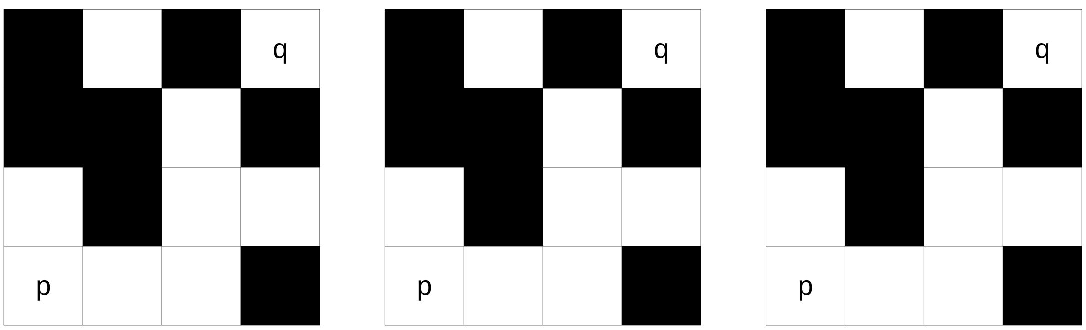
b. De witte pixels p en q, aangegeven in onderstaande figuren, heten *verbonden* ("connected") indien het mogelijk is ze middels een digitaal pad bestaande uit enkel witte pixels met elkaar te verbinden. Opeenvolgende pixels op het pad moeten voldoen aan een goed gedefiniëerd "*adjacency*" criterium. In deze opgave beschouwen we "4-adjacency", "8-adjacency" en "mixed-adjacency" zoals uitgelegd in § 1.5.2 van het dictaat.

Geef in elk van de onderstaande figuren aan of het mogelijk is om een digitaal pad van p naar q te trekken en zo ja, teken het *kortste* pad, in geval van achtereenvolgens (zie bijlage aan het eind van dit tentamen):

$(2\frac{1}{2})$ **b1.** "4-adjacency" (linker figuur),

$(2\frac{1}{2})$ **b2.** "8-adjacency" (middelste figuur), respectievelijk

$(2\frac{1}{2})$ **b3.** "mixed-adjacency" (rechter figuur).



c. We definiëren de p-norm van een $M \times N$ $(M, N \in \mathbb{N})$ binair beeld f voor $p \geq 1$ en voor $p = \infty$ als volgt:

$$\|f\|_p = \frac{1}{MN} \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |f[i,j]|^p \right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{resp.} \qquad \|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p \,.$$

Let op: De definitie wijkt enigszins af van die in het dictaat!

Bereken voor bovenstaand binaire beeld achtereenvolgens

$(2\frac{1}{2})$ **c1.** de 1-norm,

$(2\frac{1}{2})$ **c2.** de 2-norm,

$(2\frac{1}{2})$ **c3.** de ∞-norm.

d. Bewijs dat voor willekeurige binaire $M \times N$ beelden f geldt

$(2\frac{1}{2})$ **d1.** $\|f\|_p \leq 1$ voor alle $p \geq 1$ en

$(2\frac{1}{2})$ **d2.** $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ dan en slechts dan als $p \geq q$.

(*20*) **2.** Beschouw voor gegeven $\epsilon \in \mathbb{R}$ de afbeelding $A : C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ gedefiniëerd door

$$A(f) = f(0) + \epsilon f''(0)\,.$$

In deze opgave mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

(5) **a.** Toon aan dat A een lineaire afbeelding is.

b. We voorzien domein en bereik van de operator A van een input- respectievelijk outputnorm, als volgt. Voor het domein, d.i. $C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, kiezen we de gebruikelijke 1-norm:

$$\|f\|_{\text{input}} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \qquad \Big(f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})\Big)\,.$$

Het bereik van A, d.i. $\mathbb{R}$, voorzien we van de gebruikelijke modulus-norm voor reële getallen:

$$\|z\|_{\text{output}} = |z| \qquad (z \in \mathbb{R})\,.$$

We beschouwen als voorbeeld $f(x) = \exp\left[-\frac{1}{\epsilon}x^2\right]$ met $\epsilon > 0$ een constante. Bepaal

(5) **b1.** $\|f\|_{\text{input}}$, evenals

(5) **b2.** $\|A(f)\|_{\text{output}}$.

(5) **c.** Bewijs dat de operator A "slecht-gesteld" is door aan te tonen dat $\|f\|_{\text{input}} \to 0$ niet impliceert dat $\|A(f)\|_{\text{output}} \to 0$.

(*30*) **3.** Beschouw de veeltermfuncties $f_1 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1$, $f_2 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ en $f_3 : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 3x^2 - c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een constante parameter. We voorzien het opspansel van deze functies, $V \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}\{f_1, f_2, f_3\}$, als volgt van een inprodukt: Als $f, g \in V$, dan $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$.

($2\frac{1}{2}$) **a1.** Laat zien dat elke tweedegraads functie $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ van de vorm $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ geschreven kan worden als lineaire combinatie van de functies f_1, f_2 en f_3, ongeacht de waarde van c.

($2\frac{1}{2}$) **a2.** Bewijs dat de functies f_1, f_2 en f_3 lineair onafhankelijk zijn ongeacht de waarde van c.

(5) **b.** Toon aan dat $\{f_1, f_2, f_3\}$ orthogonaal is dan en slechts dan als $c = 1$.

(5) **c.** Neem voortaan $c = 1$. Stel $g_1 = \lambda_1 f_1$, $g_2 = \lambda_2 f_2$ en $g_3 = \lambda_3 f_3$ voor zekere constanten

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Bepaal de waarden van deze constanten als gegeven is dat $\{g_1, g_2, g_3\}$ een orthonormaal stelsel vormt.

d. Beschouw de differentiaaloperator $S : V \longrightarrow V : f \mapsto S(f)$ gegeven door $S(f)(x) = x\dfrac{df(x)}{dx}$.

(5) **d1.** Bewijs dat S een lineaire afbeelding is.

($2\frac{1}{2}$) **d2.** Bepaal de matrix $\mathbf{S}$ behorende bij de operator S ten opzichte van de basis $\{f_1, f_2, f_3\}$. Dat wil zeggen, als $p = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$ en $q = S(p) = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3$, bepaal dan de matrix die de coördinatenvectoren van p en q relateert volgens

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

($2\frac{1}{2}$) **d3.** Bewijs dat S singulier is, dat wil zeggen dat de beeldruimte van S een lagere dimensie heeft dan het domein.

(5) **d4.** Laat zien dat S geen projectie is, maar dat er een lineaire deelruimte van V bestaat waarbinnen S, beperkt tot die deelruimte, wel een projectie definiëert. Bepaal de maximale deelruimte waarvoor dit het geval is.

(*25*) **4.** In deze opgave beschouwen we een synthetisch signaal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gedefiniëerd als volgt:

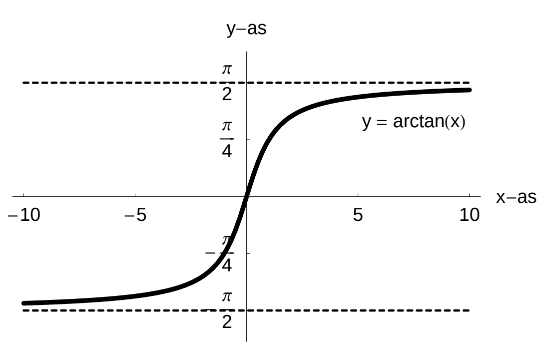
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Verder definiëren we het zogenaamde Poisson filter $\phi_\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ voor $\sigma > 0$ als

$$\phi_\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{x^2 + \sigma^2}.$$

Bij deze opgave mag je gebruik maken van de volgende standaardformules (zie ook onderstaande grafiek):

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}.$$



Verder hanteren we in deze opgave de volgende Fourierconventie:

$$\widehat{u}(\omega) = \mathcal{F}(u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}\, u(x)\, dx \qquad \text{en dus} \qquad u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}\, \widehat{u}(\omega)\, d\omega\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **a.** Toon aan dat $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\sigma(x)\, dx = 1$ ongeacht de waarde van σ.

($2\frac{1}{2}$) **b1.** Bewijs dat voor willekeurige, voldoende gladde, integreerbare filters ϕ geldt:

$$(f * \phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(\xi)\, d\xi\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **b2.** Laat door expliciete berekening zien dat het convolutieprodukt $f * \phi_\sigma$ gegeven wordt door

$$(f * \phi_\sigma)(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{\sigma}\,.$$

(5) **c.** Toon aan dat de Fouriergetransformeerde $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$ van f gegeven wordt door

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{i\omega}\,.$$

Hint: Uit onderdeel **b1** volgt dat $\frac{d}{dx}(f * \phi)(x) = \phi(x)$. Pas hier Fouriertransformatie op toe.

d. Zonder bewijs geven we hier de Fouriergetransformeerde $\widehat{\phi}_\sigma = \mathcal{F}(\phi_\sigma)$ van ϕ_σ:

$$\widehat{\phi}_\sigma(\omega) = e^{-\sigma|\omega|}\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d1.** Verklaar het gedrag van $\widehat{\phi}_\sigma(\omega)$ voor $\omega \to 0$ in termen van eigenschappen van het bijbehorende spatiële filter $\phi_\sigma(x)$. Hint: Vergelijk onderdeel **a**.

($2\frac{1}{2}$) **d2.** Verklaar het gedrag van $\widehat{f}(\omega)$ voor $\omega \to 0$ in termen van eigenschappen van het bijbehorende spatiële signaal $f(x)$.

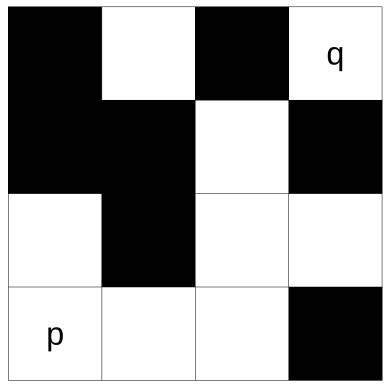
(5) **e.** Bepaal het functievoorschrift van de functie $\mathcal{F}(f * \phi_\sigma)$.

($2\frac{1}{2}$) **f.** Toon aan dat $\lim_{\sigma\to 0} f * \phi_\sigma = f$. Hint: Neem de "Fourierroute".

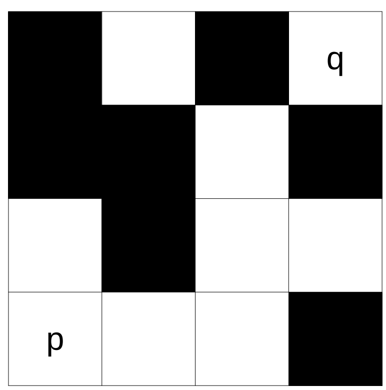
EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

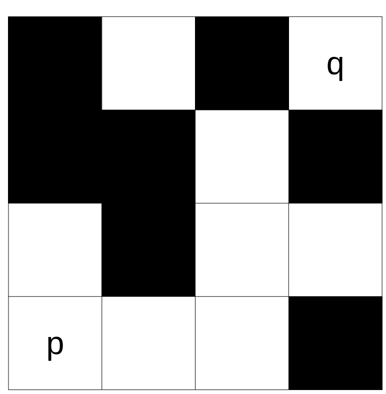
Naam: Studentnummer:



Figuur 1: Kortste pad van p naar q middels “4-adjacency”.



Figuur 2: Kortste pad van p naar q middels “8-adjacency”.



Figuur 3: Kortste pad van p naar q middels “mixed-adjacency”.