TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Vrijdag 26 maart 2004. Tijd: 14.00–17.00 uur. Plaats: MA 1.41

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(25) **1.** Onderstaande figuur toont een (reëelwaardig) grijswaardenbeeld f opgebouwd uit 9 pixels, waarvan de numerieke waarden zijn aangegeven.

2	0	0
4	–6	3
0	4	0

a. We definiëren de p-norm van een $M \times N$ beeld g als

$$\|g\|_p = \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |g[i,j]|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

voor $p \geq 1$. Bereken voor bovenstaand 3×3-beeld f de volgende normen:

$(2\frac{1}{2})$ **a1.** $\|f\|_1$.

$\|f\|_1 = 2 + 0 + 0 + 4 + 6 + 3 + 0 + 4 + 0 = 19.$

$(2\frac{1}{2})$ **a2.** $\|f\|_2$.

$\|f\|_2 = (2^2 + 0^2 + 0^2 + 4^2 + 6^2 + 3^2 + 0^2 + 4^2 + 0^2)^{\frac{1}{2}} = 9.$

b. We definiëren voorts de "∞-norm" van een $M \times N$ beeld g als $\|g\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|g\|_p$.

$(2\frac{1}{2})$ **b1.** Beargumenteer dat geldt $\|g\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,M, j=1,\ldots,N} |g[i,j]|$.
(*Hint:* Bekijk het asymptotisch gedrag van $(m^p + M^p)^{\frac{1}{p}} = M\left((\frac{m}{M})^p + 1\right)^{\frac{1}{p}}$ voor $0 \leq m \leq M$ als $p \to \infty$.)

Stel (i^*, j^*) is een roosterpunt waarvoor geldt $|g[i^*, j^*]| \geq |g[i,j]|$ voor alle $i = 1, \ldots, M, j = 1, \ldots, N$. Schrijf gemakshalve $S_p = |g[i^*, j^*]|^p$ en $s_p = \sum_{(i,j)\neq(i^*,j^*)} |g[i,j]|^p$, dus

$$\|g\|_p = (s_p + S_p)^{\frac{1}{p}} = S_p^{\frac{1}{p}} \left(\frac{s_p}{S_p} + 1\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Uit $S_p^{\frac{1}{p}} = |g[i^*, j^*]|$ en $s_p = \sum_{(i,j)\neq(i^*,j^*)} |g[i,j]|^p \leq \sum_{(i,j)\neq(i^*,j^*)} |g[i^*, j^*]|^p = (MN-1)S_p$ volgt $\frac{s_p}{S_p} \leq MN-1$, zodat

$$\|g\|_p \leq |g[i^*, j^*]|(MN)^{\frac{1}{p}} .$$

Als $p \to \infty$ dan $(MN)^{\frac{1}{p}} \to 1$ en dus $\|g\|_p \to |g[i^*, j^*]| = \max_{i=1,\ldots,M, j=1,\ldots,N} |g[i,j]|$.

$(2\frac{1}{2})$ **b2.** Bereken $\|f\|_\infty$ voor het gegeven 3×3-beeld f.

We definiëren voor een willekeurig $M \times N$ beeld g het genormeerde beeld

$$g_p = \frac{g}{\|g\|_p} .$$

c. Bepaal voor het gegeven 3×3 beeld f achtereenvolgens (je kunt hiervoor de *bijlage* gebruiken)

$(2\frac{1}{2})$ **c1.** f_1,

$(2\frac{1}{2})$ **c2.** f_2,

$(2\frac{1}{2})$ **c3.** f_∞.

$\frac{2}{19}$	0	0
$\frac{4}{19}$	$-\frac{6}{19}$	$\frac{3}{19}$
0	$\frac{4}{19}$	0

(a) f_1

$\frac{2}{9}$	0	0
$\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{4}{9}$	0

(b) f_2

$\frac{1}{3}$	0	0
$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{2}{3}$	0

(c) f_∞

Voor willekeurige $M \times N$ beelden g en h voeren we het (reële) standaardinprodukt in, als volgt:

$$\langle g|h\rangle = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} g[i,j]\, h[i,j] .$$

$(2\frac{1}{2})$ **d.** Bewijs dat geldt $\langle g_p | h_q \rangle = \dfrac{\langle g|h\rangle}{\|g\|_p \|h\|_q}$.

Op grond van bilineariteit mogen we scalaire factoren uit het inprodukt naar voren halen:

$$\langle g_p | h_q \rangle = \langle \tfrac{g}{\|g\|_p} | \tfrac{h}{\|h\|_q} \rangle = \frac{\langle g|h\rangle}{\|g\|_p \|h\|_q}$$

In het geval van discrete $M \times N$ beelden g en h luidt de ongelijkheid van Hölder:

$$\|gh\|_1 \leq \|g\|_p \, \|h\|_q \,,$$

voor elk parameterpaar (p, q) waarvoor geldt $1 \leq p, q \leq \infty$ en $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(5) **e.** Bewijs dat voor willekeurige $M \times N$ beelden g en h geldt $\langle g_p | h_q \rangle \leq 1$. Hierin voldoet het paar (p, q) aan de condities van de Hölderongelijkheid.

Gebruik makend van het vorige onderdeel en (in de laatste stap) van de gegeven ongelijkheid van Hölder kunnen we de volgende afschatting maken:

$$\langle g_p | h_q \rangle \stackrel{\text{d}}{=} \frac{\langle g|h\rangle}{\|g\|_p \|h\|_q} \leq \frac{|\langle g|h\rangle|}{\|g\|_p \|h\|_q} \leq \frac{\|gh\|_1}{\|g\|_p \|h\|_q} \leq 1 \,.$$

N.B. De voorlaatste stap volgt uit het feit dat de absolute waarde van een som van termen altijd kleiner of gelijk is aan de som van de absolute waarden van de termen:

$$|\langle g|h\rangle| = \left| \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} g[i,j] \, h[i,j] \right| \leq \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |g[i,j] \, h[i,j]| = \|gh\|_1 \,.$$

❦

(*35*) **2.** In deze opgave is V de verzameling van alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die geschreven kunnen worden als een eindige lineaire combinatie

$$f = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n c_n + b_n s_n) \quad \text{voor zekere } a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R} \text{ en willekeurige } N \in \mathbb{N}.$$

Hierin is $c_0(x) = 1$, $c_n(x) = \cos(nx)$ en $s_n(x) = \sin(nx)$ voor $n \in \mathbb{N}$. Zonder beperking op de indexwaarden $n \in \mathbb{N}$ vormen deze functies tezamen de aftelbaar oneindige set

$$\mathcal{B}_V = \{c_0, c_1, c_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots\} \,.$$

Verder is W de verzameling van alle oneindig lange rijtjes $\underline{r}$ van complexe getallen $r_n \in \mathbb{C}$ van de vorm

$$\underline{r} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{met eindig aantal } r_n \neq 0.$$

Met $\underline{e}_k \in W$ duiden we het getallenrijtje $\{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ aan, waarvan alle elementen gelijk zijn aan nul met uitzondering van het k-de element, welk gelijk is aan één. Op voor de hand liggende wijze geordend vormen deze rijtjes de aftelbaar oneindige set

$$\mathcal{B}_W = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots\} .$$

($2\frac{1}{2}$) **a1.** Bewijs dat $\int_{-\pi}^{\pi} s_m(x)\, c_n(x)\, dx = 0$ voor alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ en $m = 1, 2, \ldots$.
(*Hint:* Gebruik waar mogelijk een symmetrie-argument; een expliciete berekening is niet nodig!)

De functie in de integrand is het produkt van een even en een oneven functie, dus een oneven functie. Als f oneven is dan is elke integraal van de vorm $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$ gelijk aan nul, mits deze bestaat.

($2\frac{1}{2}$) **a2.** Bewijs dat $\int_{-\pi}^{\pi} s_m(x)\, s_n(x)\, dx = 0$ voor alle $m, n = 1, 2, \ldots$ met $n \neq m$.
(*Hint:* Leid uit de twee goniometrische identiteiten $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\, \cos\beta \mp \sin\alpha\, \sin\beta$ een vergelijking af voor $\sin\alpha\, \sin\beta$.)

Gebruik makend van de hint vind je $s_m(x)\, s_n(x) = \frac{1}{2}\left(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right)$. Als $m \neq n$ dan zijn beide termen hierin sinusoïden met geheeltallig aantal perioden in het interval $(-\pi, \pi)$. Integreren levert dan nul.

($2\frac{1}{2}$) **a3.** Bewijs dat $\int_{-\pi}^{\pi} c_m(x)\, c_n(x)\, dx = 0$ voor alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ en $m = 1, 2, \ldots$ met $n \neq m$.
(*Hint:* Leid uit de twee goniometrische identiteiten $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\, \cos\beta \mp \sin\alpha\, \sin\beta$ een vergelijking af voor $\cos\alpha\, \cos\beta$. Beschouw het geval $n=0$ apart.)

Gebruik makend van de hint vind je $c_m(x)\, c_n(x) = \frac{1}{2}\left(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\right)$. Als $m \neq n$ dan geldt hetzelfde argument als voorheen (waarin $m, n = 1, 2, \ldots$). Het geval $n=0$ wordt ook door dit argument ondervangen en behoeft dus geen aparte beschouwing.

($2\frac{1}{2}$) **a4.** Bereken tenslotte de integralen uit onderdelen a2 en a3 voor het geval $n=m$.

Voor het geval $m = n$ kunnen we dezelfde goniometrische identiteiten als voorheen gebruiken. We hebben $s_n(x)\, s_n(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2nx)\right)$, respectievelijk $c_n(x)\, c_n(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2nx)\right)$. Voor $n = 1, 2, \ldots$ volgt dan $\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\, s_n(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2nx)\right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = \pi$ (doordat de sinusoïde term wederom geen netto bijdrage levert). Evenzo hebben we voor $n = 1, 2, \ldots$ $\int_{-\pi}^{\pi} c_n(x)\, c_n(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2nx)\right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx = \pi$. Echter, als $n = 0$ dan krijgen we $\int_{-\pi}^{\pi} c_0(x)\, c_0(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi$.

(5) **b.** Gebruik de resultaten uit onderdeel a om te bewijzen dat $\mathcal{B}_V$ een basis is van V.
(*Hint:* Uit $f = 0$ volgt in het bijzonder dat $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = 0$ voor elk element $g \in \mathcal{B}_V$.)

Per definitie kunnen we elk element van V schrijven als lineaire combinatie van functies in $\mathcal{B}_V$, dus $\operatorname{Span} \mathcal{B}_V = V$. Resteert te bewijzen dat de functies in $\mathcal{B}_V$ onafhankelijk zijn. Anders geformuleerd, we moeten bewijzen dat $f \equiv a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n c_n + b_n s_n) = 0$ (d.w.z. de nulfunctie) d.e.s.d.a. alle coëfficiënten, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ en $b_1, b_2, \ldots$ nul zijn. Hiervoor kun je de hint gebruiken: Schrijf gemakshalve $\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$ voor willekeurige functies $f, g \in V$. Neem voor f bovenstaande lineaire combinatie en voor g achtereenvolgens c_0, c_m en s_m, $m = 1, 2, \ldots$:

$$0 \quad = \quad \langle 0 | c_0 \rangle = \langle a_0 c_0 + \textstyle\sum_{n=1}^{N} (a_n c_n + b_n s_n) | c_0 \rangle = a_0 \langle c_0 | c_0 \rangle + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \langle c_n | c_0 \rangle + \sum_{n=1}^{N} b_n \langle s_n | c_0 \rangle = 2\pi\, a_0 \,,$$

$$0 = \langle 0|c_m\rangle = \langle a_0 c_0 + \textstyle\sum_{n=1}^N (a_n c_n + b_n s_n)|c_m\rangle = a_0\langle c_0|c_m\rangle + \displaystyle\sum_{n=1}^N a_n\langle c_n|c_m\rangle + \sum_{n=1}^N b_n\langle s_n|c_m\rangle = \pi\, a_m\,,$$

$$0 = \langle 0|s_m\rangle = \langle a_0 c_0 + \textstyle\sum_{n=1}^N (a_n c_n + b_n s_n)|s_m\rangle = a_0\langle c_0|s_m\rangle + \displaystyle\sum_{n=1}^N a_n\langle c_n|s_m\rangle + \sum_{n=1}^N b_n\langle s_n|s_m\rangle = \pi\, b_m\,.$$

Hierin is gebruik gemaakt van het feit dat het inprodukt van de nulfunctie met een willekeurige functie nul oplevert (eerste stap) en van de in onderdeel a uitgerekende integralen (laatste stap). Er geldt dus inderdaad noodzakelijkerwijs $a_0, a_1, a_2, \ldots = 0$ en $b_1, b_2, \ldots = 0$. (Het is evident dat deze keuze van coëfficiënten ook voldoende is om de nulfunctie te construeren.)

(5) **c.** Beargumenteer dat de set $\mathcal{B}_W$ een basis is van W.

Merk op dat je een willekeurig rijtje $\underline{r} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ kunt schrijven als lineaire combinatie $r_1\underline{e}_1 + r_2\underline{e}_2 + \ldots$ Stel nu dat $\underline{0} = \underline{e}_1 + r_2\underline{e}_2 + \ldots$ voor zekere coëfficiënten $r_1, r_2, \ldots$, m.a.w. $\{0, 0, \ldots\} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ dan volgt dat $r_1 = r_2 = \ldots = 0$, vice versa. De elementaire rijtjes in $\mathcal{B}_W$ zijn dus onafhankelijk.

Beschouw de afbeelding $A : V \to W : f \mapsto A(f)$ gegeven door

$$A(f) = \{a_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots\}\,.$$

Hierin zijn de reële getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ precies de coëfficiënten van f ten opzichte van de basis $\mathcal{B}_V$ en is i het imaginaire eenheidsgetal ($i^2 = -1$).

(5) **d.** Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

Stel $f, g \in V$, dus er bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat

$$\begin{aligned} f &= a_0 c_0 + \sum_{n=1}^N (a_n c_n + b_n s_n) \quad \text{voor zekere } a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R} \text{ en} \\ g &= \alpha_0 c_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n c_n + \beta_n s_n) \quad \text{voor zekere } \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(Merk op dat je zonder verlies van algemeenheid in beide gevallen dezelfde N mag nemen.) Als $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dan geldt voor de lineaire combinatie $\lambda\, f + \mu\, g$:

$$\begin{aligned} \lambda\, f + \mu\, g &= \lambda \left(a_0 c_0 + \sum_{n=1}^N (a_n c_n + b_n s_n) \right) + \mu \left(\alpha_0 c_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n c_n + \beta_n s_n) \right) = \\ &= (\lambda\, a_0 + \mu\, \alpha_0) c_0 + \sum_{n=1}^N ((\lambda\, a_n + \mu\, \alpha_n) c_n + (\lambda\, b_n + \mu\, \beta_n) s_n)\,. \end{aligned}$$

Dus volgens de definitie van A vinden we

$$\begin{aligned} A(\lambda\, f + \mu\, g) &= \{\lambda\, a_0 + \mu\, \alpha_0, \lambda\, a_1 + \mu\, \alpha_1 + i(\lambda\, b_1 + \mu\, \beta_1), \lambda\, a_2 + \mu\, \alpha_2 + i(\lambda\, b_2 + \mu\, \beta_2), \ldots, \lambda\, a_N + \mu\, \alpha_N + i(\lambda\, b_N + \mu\, \beta_N), 0, \ldots\} \\ &= \lambda\, \{a_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_N + ib_N, 0, \ldots\} + \mu \{\alpha_0, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \alpha_N + i\beta_N, 0, \ldots\} = \lambda\, A(f) + \mu\, A(g)\,. \end{aligned}$$

Met A_N bedoelen we de lineaire afbeelding A beperkt tot de deelruimte V_N opgespannen door $\mathcal{B}_{V_N} = \{c_0, c_1, \ldots, c_N, s_1, \ldots, s_N\}$ voor vast gekozen $N \in \mathbb{N}$.

$(2\frac{1}{2})$ **e1.** Bewijs dat V_N een lineaire deelruimte is van V.

Je moet bewijzen dat V_N gesloten is onder lineaire combinaties, d.w.z. indien $f, g \in V_N$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan $\lambda f + \mu g \in V_N$. Dit blijkt uit het vorige onderdeel: Uit

$$\begin{aligned}
\lambda f + \mu g &= \lambda \left(a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n c_n + b_n s_n) \right) + \mu \left(\alpha_0 c_0 + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n c_n + \beta_n s_n) \right) = \\
&= (\lambda\, a_0 + \mu\, \alpha_0) c_0 + \sum_{n=1}^{N} ((\lambda\, a_n + \mu\, \alpha_n) c_n + (\lambda\, b_n + \mu\, \beta_n) s_n) \ ,
\end{aligned}$$

lezen we af dat $\lambda f + \mu g \in V_N$.

$(2\frac{1}{2})$ **e2.** Bewijs dat $W_N \stackrel{\text{def}}{=} A(V_N) = \{A(f) \in W \mid f \in V_N\}$ een lineaire deelruimte is van W met basis $\mathcal{B}_{W_N} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_{N+1}\}$.

Een element in W_N is van de vorm $\underline{r} = \{a_0, a_1+ib_1, a_2+ib_2, \ldots, a_N+ib_N, 0, \ldots\}$, waarin de coëfficiënten $a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ willekeurige reële waarden kunnen aannemen. Voor willekeurige $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ en $\underline{r} = \{a_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_N + ib_N, 0, \ldots\}$, $\underline{\rho} = \{\alpha_0, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \alpha_N + i\beta_N, 0, \ldots\} \in W_N$ geldt (zie vorig onderdeel)

$$\begin{aligned}
\lambda\, \underline{r} + \mu\, \underline{\rho} &= \lambda\, \{a_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_N + ib_N, 0, \ldots\} + \mu\{\alpha_0, \alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, \alpha_N + i\beta_N, 0, \ldots\} \\
&= \{\lambda\, a_0 + \mu\, \alpha_0, \lambda\, a_1 + \mu\, \alpha_1 + i(\lambda\, b_1 + \mu\, \beta_1), \lambda\, a_2 + \mu\, \alpha_2 + i(\lambda\, b_2 + \mu\, \beta_2), \ldots, \lambda\, a_N + \mu\, \alpha_N + i(\lambda\, b_N + \mu\, \beta_N), 0, \ldots\} \\
&\in W_N\, .
\end{aligned}$$

W_N is dus een lineaire deelruimte van W. Uit de decompositie

$$\underline{r} = \{a_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_N + ib_N, 0, \ldots\} = a_0\, \underline{e}_1 + (a_1 + ib_1)\, \underline{e}_2 + \ldots + (a_N + ib_N)\, \underline{e}_{N+1}$$

volgt dat $\mathcal{B}_{W_N} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_{N+1}\}$ een basis is van W_N.

(5) **f.** Bepaal de matrix behorende bij de lineaire afbeelding A_N ten opzichte van de bases $\mathcal{B}_{V_N}$ en $\mathcal{B}_{W_N}$.

Als je de beelden van de basisvectoren in $\mathcal{B}_{V_N} = \{c_0, c_1, \ldots, c_N, s_1, \ldots, s_N\}$ onder A_N uitdrukt t.o.v. de basis $\mathcal{B}_{W_N} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_{N+1}\}$ kun je de matrix $\mathbf{A}_N$ bij A_N kolomsgewijs opstellen. De verticale streep markeert het einde van de eerste $N+1$ coëfficiënten; alle daarop volgende coëfficiënten zijn nul:

$$\begin{aligned}
A_N(c_0) &= \{1, 0, 0, \ldots, 0, 0 \,|\, 0, \ldots\} = \underline{e}_1 = 1\, \underline{e}_1 + 0\, \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3 + \ldots + 0\, \underline{e}_N + 0\, \underline{e}_{N+1} \\
A_N(c_1) &= \{0, 1, 0, \ldots, 0, 0 \,|\, 0, \ldots\} = \underline{e}_2 = 0\, \underline{e}_1 + 1\, \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3 + \ldots + 0\, \underline{e}_N + 0\, \underline{e}_{N+1} \\
&\vdots \\
A_N(c_{N-1}) &= \{0, 0, 0, \ldots, 1, 0 \,|\, 0, \ldots\} = \underline{e}_N = 0\, \underline{e}_1 + 0\, \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3 + \ldots + 1\, \underline{e}_N + 0\, \underline{e}_{N+1} \\
A_N(c_N) &= \{0, 0, 0, \ldots, 0, 1 \,|\, 0, \ldots\} = \underline{e}_{N+1} = 0\, \underline{e}_1 + 0\, \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3 + \ldots + 0\, \underline{e}_N + 1\, \underline{e}_{N+1} \\
A_N(s_1) &= \{0, i, 0, \ldots, 0, 0 \,|\, 0, \ldots\} = i\underline{e}_2 = 0\, \underline{e}_1 + i\, \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3 + \ldots + 0\, \underline{e}_N + 0\, \underline{e}_{N+1} \\
&\vdots \\
A_N(s_{N-1}) &= \{0, 0, 0, \ldots, i, 0 \,|\, 0, \ldots\} = i\underline{e}_N = 0\, \underline{e}_1 + 0\, \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3 + \ldots + + i\, \underline{e}_N + 0\, \underline{e}_{N+1} \\
A_N(s_N) &= \{0, 0, 0, \ldots, 0, i \,|\, 0, \ldots\} = i\underline{e}_{N+1} = 0\, \underline{e}_1 + 0\, \underline{e}_2 + 0\, \underline{e}_3 + \ldots + +0\, \underline{e}_N + i\, \underline{e}_{N+1}
\end{aligned}$$

De matrix $\mathbf{A}_N$ bij de lineaire afbeelding A_N is dus als volgt:

$$\mathbf{A}_N = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & i & \ldots & 0 & 0 \\
 & & & \vdots & & & & & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & i & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & i
\end{array}\right]$$

Dit is een $(2N{+}1)\times(N{+}1)$ matrix, omdat het aantal basisvectoren in $\mathcal{B}_{V_N}$ en $\mathcal{B}_{W_N}$ respectievelijk $2N{+}1$ en $N{+}1$ bedraagt.

❦

(*25*) **3.** In deze opgave beschouwen we een periodiek signaal $f_{a,c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd als volgt:

$$f_{a,c}(t) = a\cos(ct) \quad \text{met } a, c > 0 \text{ constanten.}$$

We hanteren verder de volgende Fourierconventie:

$$\widehat{u}(\omega) = \mathcal{F}(u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, u(t)\, dt \qquad \text{en dus} \qquad u(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, \widehat{u}(\omega)\, d\omega\,.$$

De gewone, inhomogene differentiaalvergelijking

$$u'' + k^2\, u = f_{a,c} \quad \text{met } k > 0 \text{ constant}$$

staat model voor een ongedempte, aangedreven harmonische oscillator, met aandrijvende kracht $f_{a,c}$. We nemen aan dat $k \neq c$. De algemene oplossing van dit inhomogene probleem kan geschreven worden als som van een zogenaamde *particuliere oplossing* u_{part} en de algemene oplossing van het bijbehorende homogene probleem, $u'' + k^2\, u = 0$, de *homogene oplossing* u_{hom}. We gaan achtereenvolgens kijken naar een reëelwaardige particuliere oplossing (a) en naar de reëelwaardige homogene oplossing (b).

(5) **a1.** Toon aan dat de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}_{a,c} = \mathcal{F}(f_{a,c})$ van $f_{a,c}$ gegeven wordt door

$$\widehat{f}_{a,c}(\omega) = \pi\, a\,(\delta(\omega + c) + \delta(\omega - c))\ .$$

Gebruik makend van de identiteit $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ en de definitie van $f_{a,c}(t)$ vind je

$$\widehat{f}_{a,c}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, f_{a,c}(t)\, dt = \frac{1}{2}a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-c)t}\, dt + \frac{1}{2}a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+c)t}\, dt = \pi\, a\,(\delta(\omega+c) + \delta(\omega - c))\ .$$

In de laatste stap is gebruik gemaakt van het feit dat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt = 2\pi\, \delta(\omega)$.

(5) **a2.** Herformuleer de inhomogene differentiaalvergelijking tot een vergelijking voor $\widehat{u}$ en $\widehat{f}_{a,c}$.

Fouriertransformatie is lineair en kun je dus termsgewijs toepassen op de inhomogene differentiaalvergelijking, waarbij je constante factoren naar voren mag halen. Met $\mathcal{F}(u'')(\omega) = -\omega^2\,\widehat{u}(\omega)$, $\mathcal{F}(k^2\, u)(\omega) = k^2\,\widehat{u}(\omega)$ en $\mathcal{F}(f_{a,c})(\omega) = \widehat{f}_{a,c}(\omega)$ vind je zodoende

$$(k^2 - \omega^2)\,\widehat{u}(\omega) = \widehat{f}_{a,c}(\omega)\,.$$

Het rechterlid is in het vorige onderdeel bepaald.

($2\frac{1}{2}$) **a3.** Laat zien dat een, bijna overal gedefinieerde, particuliere oplossing gegeven wordt door

$$\widehat{u}_{\text{part}}(\omega) = \frac{\widehat{f}_{a,c}(\omega)}{k^2 - \omega^2}\,.$$

Uit het vorige onderdeel haal je $\widehat{u}_{\text{part}}(\omega)$ voor het geval $\omega \neq \pm k$, nl.

$$\widehat{u}_{\text{part}}(\omega) = \frac{\widehat{f}_{a,c}(\omega)}{k^2 - \omega^2}\,,$$

met wederom $\widehat{f}_{a,c}(\omega)$ als voorheen.

$(2\frac{1}{2})$ **a4.** Bewijs dat de corresponderende oplossing in temporele representatie gegeven wordt door

$$u_{\text{part}}(t) = \frac{f_{a,c}(t)}{k^2 - c^2}\,.$$

Pas de Fourier inverse formule toe:

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}_{\text{part}})(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,\widehat{u}_{\text{part}}(\omega)\,d\omega = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,\frac{\delta(\omega + c) + \delta(\omega - c)}{k^2 - \omega^2}\,d\omega = \frac{a}{k^2 - c^2}\,\frac{e^{ict} + e^{-ict}}{2} = \frac{a\,\cos(ct)}{k^2 - c^2} = \frac{f_{a,c}(t)}{k^2 - c^2}\,.$$

Hierin is weer gebruik gemaakt van de goniometrische identiteit $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

De algemene homogene oplossing u_{hom} van het homogene probleem

$$u'' + k^2\,u = 0$$

luidt $u_{\text{hom}}(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt)$ met A, B willekeurige constanten.

$(2\frac{1}{2})$ **b1.** Herformuleer de homogene differentiaalvergelijking tot een vergelijking voor $\widehat{u}$.

Dit is geheel analoog aan onderdeel a2, maar nu zonder inhomogeniteit. Dus

$$(k^2 - \omega^2)\,\widehat{u}(\omega) = 0\,.$$

$(2\frac{1}{2})$ **b2.** Beargumenteer dat voor de oplossing $\widehat{u}_{\text{hom}}$ moet gelden $\widehat{u}_{\text{hom}}(\omega) = 0$ voor alle $\omega \neq \pm k$.

Als $\omega \neq \pm k$ dan is $k^2 - \omega^2 \neq 0$, dus volgt uit b1 dat $\widehat{u}(\omega) = 0$. (Als $\omega = \pm k$ kunnen we geen uitspraak doen over $\widehat{u}(\omega)$.)

$(2\frac{1}{2})$ **b3.** Bepaal de Fouriergetransformeerde $\widehat{u}_{\text{hom}}$ van u_{hom}.

Per definitie hebben we

$$\widehat{u}_{\text{hom}}(\omega) = \mathcal{F}(u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,u_{\text{hom}}(t)\,dt = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\cos(kt)\,dt + B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\sin(kt)\,dt\,.$$

De Fouriertransformaties van sinus en cosinus vind je als voorheen middels herschrijving in termen van complexe e-machten:

$$\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \qquad \text{resp.} \qquad \sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}\,.$$

Hiermee krijg je

$$\begin{aligned}\widehat{u}_{\text{hom}}(\omega) &= \frac{1}{2}A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - k)t}\,dt + \frac{1}{2}A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + k)t}\,dt + \frac{1}{2i}B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - k)t}\,dt - \frac{1}{2i}B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + k)t}\,dt \\ &= \pi\,(A - iB)\,\delta(\omega - k) + \pi\,(A + iB)\,\delta(\omega + k)\,.\end{aligned}$$

$(2\frac{1}{2})$ **b4.** Is deze oplossing consistent met je bevinding in onderdeel b2?

Ja. De oplossing is goed gedefinieerd in distributionele zin en voldoet aan de observatie in onderdeel b2.

❦

(15) **4.** Stel $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ is een Schwartz functie. We duiden haar n-de orde afgeleide aan met $\phi^{(n)}$.

$(7\frac{1}{2})$ **a.** Bewijs dat

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\phi^{(n)}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,dx\,.$$

(*Hint:* Partiële integratie.)

Noem het linkerlid gemakshalve I_n. Voor I_{n+1}, met $n \in \mathbb{Z}_0^+$, volgt dan middels partiële integratie

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1}\,\phi^{(n+1)}(x)\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}\,\phi^{(n)}(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\phi^{(n)}(x)\,dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\phi^{(n)}(x)\,dx \quad = \quad I_n\,. \end{aligned}$$

Kennelijk hangt I_n niet af van $n \in \mathbb{Z}_0^+$, dus $I_n = I_0$.

Stel $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ is de reguliere getemperde distributie gegeven door de functie f met functievoorschrift $f(x) = x^n$.

b. Bepaal

$(2\frac{1}{2})$ **b1.** de klassieke n-de orde afgeleide $f^{(n)}$ van f (er wordt hier dus gevraagd naar een functie), evenals

$(2\frac{1}{2})$ **b2.** de distributionele n-de orde afgeleide $T_f^{(n)}$ van T_f (er wordt hier dus gevraagd naar een getemperde distributie).

Voor de klassieke n-de orde afgeleide (b1) geldt $f^{(n)}(x) = n!$ constant. (Formeel bewijs: Voor $n\!=\!0$ is dit triviaal (inductiestap). Differentiëren we de veelterm x^{n+1} $n\!+\!1$ maal, dan vinden we met volledige inductie

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}x^{n+1} = (n+1)\,\frac{d^n}{dx^n}x^n \stackrel{\text{v.i.}}{=} (n+1)\,n! = (n+1)!\,.$$

Hierin is aangegeven waar de inductiehypothese is gebruikt.) Voor de distributionele n-de orde afgeleide (b2) geldt het volgende. Zij $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ een willekeurige testfunctie, dan is

$$T_f^{(n)}[\phi] \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n\,T_f[\phi^{(n)}] = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\phi^{(n)}(x)\,dx \stackrel{\text{a}}{=} n!\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\,dx\,.$$

Dit definieert $T_f^{(n)}$.

($2\frac{1}{2}$) **b3.** Geldt $T_f^{(n)} = T_{f^{(n)}}$?

Merk op dat het resultaat van b2 geschreven kan worden als

$$T_f^{(n)}[\phi] \stackrel{\text{b2}}{=} n! \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} n!\,\phi(x)\,dx \stackrel{\text{b1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)\,\phi(x)\,dx = T_{f^{(n)}}[\phi]\,.$$

Aangezien dit voor alle testfuncties $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ geldt volgt inderdaad $T_f^{(n)} = T_{f^{(n)}}$.

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam: Studentnummer:

2	0	0
4	–6	3
0	4	0

Figuur 1: Nogmaals het 3×3-beeld zoals gegeven in vraag 1.

(a) f_1

(b) f_2

(c) f_∞

Figuur 2: Vul pixelwaarden in overeenkomstig je antwoord op onderdelen c1–c3 van vraag 1.