TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: Vrijdag 26 maart 2004. Tijd: 14.00–17.00 uur. Plaats: MA 1.41

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van dictaat, aantekeningen en calculator is toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*25*) **1.** Onderstaande figuur toont een (reëelwaardig) grijswaardenbeeld f opgebouwd uit 9 pixels, waarvan de numerieke waarden zijn aangegeven.

2	0	0
4	–6	3
0	4	0

a. We definiëren de p-norm van een $M \times N$ beeld g als

$$\|g\|_p = \left(\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} |g[i,j]|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

voor $p \geq 1$. Bereken voor bovenstaand 3×3-beeld f de volgende normen:

($2\frac{1}{2}$) **a1.** $\|f\|_1$.

($2\frac{1}{2}$) **a2.** $\|f\|_2$.

b. We definiëren voorts de "∞-norm" van een $M \times N$ beeld g als $\|g\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|g\|_p$.

($2\frac{1}{2}$) **b1.** Beargumenteer dat geldt $\|g\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,M, j=1,\ldots,N} |g[i,j]|$.
(*Hint:* Bekijk het asymptotisch gedrag van $(m^p + M^p)^{\frac{1}{p}} = M\left(\left(\frac{m}{M}\right)^p + 1\right)^{\frac{1}{p}}$ voor $0 \leq m \leq M$ als $p \to \infty$.)

($2\frac{1}{2}$) **b2.** Bereken $\|f\|_\infty$ voor het gegeven 3×3-beeld f.

We definiëren voor een willekeurig $M\times N$ beeld g het genormeerde beeld

$$g_p = \frac{g}{\|g\|_p}\,.$$

c. Bepaal voor het gegeven 3×3 beeld f achtereenvolgens (je kunt hiervoor de *bijlage* gebruiken)

($2\frac{1}{2}$) **c1.** f_1,

($2\frac{1}{2}$) **c2.** f_2,

($2\frac{1}{2}$) **c3.** f_∞.

Voor willekeurige $M \times N$ beelden g en h voeren we het (reële) standaardinprodukt in, als volgt:

$$\langle g|h\rangle = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} g[i,j]\,h[i,j]\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **d.** Bewijs dat geldt $\langle g_p|h_q\rangle = \dfrac{\langle g|h\rangle}{\|g\|_p\|h\|_q}$.

In het geval van discrete $M\times N$ beelden g en h luidt de ongelijkheid van Hölder:

$$\|gh\|_1 \leq \|g\|_p\,\|h\|_q\,,$$

voor elk parameterpaar (p,q) waarvoor geldt $1 \leq p,q \leq \infty$ en $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

(5) **e.** Bewijs dat voor willekeurige $M\times N$ beelden g en h geldt $\langle g_p|h_q\rangle \leq 1$. Hierin voldoet het paar (p,q) aan de condities van de Hölderongelijkheid.

(*35*) **2.** In deze opgave is V de verzameling van alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die geschreven kunnen worden als een eindige lineaire combinatie

$$f = a_0c_0+\sum_{n=1}^{N}(a_nc_n + b_ns_n) \quad \text{voor zekere } a_0,a_1,\ldots,a_N,b_1,\ldots,b_N \in \mathbb{R} \text{ en willekeurige } N\in\mathbb{N}.$$

Hierin is $c_0(x) = 1$, $c_n(x) = \cos(nx)$ en $s_n(x) = \sin(nx)$ voor $n \in \mathbb{N}$. Zonder beperking op de indexwaarden $n \in \mathbb{N}$ vormen deze functies tezamen de aftelbaar oneindige set

$$\mathcal{B}_V = \{c_0,c_1,c_2,\ldots,s_1,s_2,\ldots\}\,.$$

Verder is W de verzameling van alle oneindig lange rijtjes $\underline{r}$ van complexe getallen $r_n \in \mathbb{C}$ van de vorm

$$\underline{r} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{met eindig aantal } r_n \neq 0.$$

Met $\underline{e}_k \in W$ duiden we het getallenrijtje $\{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$ aan, waarvan alle elementen gelijk zijn aan nul met uitzondering van het k-de element, welk gelijk is aan één. Op voor de hand liggende wijze geordend vormen deze rijtjes de aftelbaar oneindige set

$$\mathcal{B}_W = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots\}\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **a1.** Bewijs dat $\int_{-\pi}^{\pi} s_m(x)\, c_n(x)\, dx = 0$ voor alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ en $m = 1, 2, \ldots$.
(*Hint:* Gebruik waar mogelijk een symmetrie-argument; een expliciete berekening is niet nodig!)

($2\frac{1}{2}$) **a2.** Bewijs dat $\int_{-\pi}^{\pi} s_m(x)\, s_n(x)\, dx = 0$ voor alle $m, n = 1, 2, \ldots$ met $n \neq m$.
(*Hint:* Leid uit de twee goniometrische identiteiten $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\, \cos\beta \mp \sin\alpha\, \sin\beta$ een vergelijking af voor $\sin\alpha\, \sin\beta$.)

($2\frac{1}{2}$) **a3.** Bewijs dat $\int_{-\pi}^{\pi} c_m(x)\, c_n(x)\, dx = 0$ voor alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ en $m = 1, 2, \ldots$ met $n \neq m$.
(*Hint:* Leid uit de twee goniometrische identiteiten $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\, \cos\beta \mp \sin\alpha\, \sin\beta$ een vergelijking af voor $\cos\alpha\, \cos\beta$. Beschouw het geval $n = 0$ apart.)

($2\frac{1}{2}$) **a4.** Bereken tenslotte de integralen uit onderdelen a2 en a3 voor het geval $n = m$.

(5) **b.** Gebruik de resultaten uit onderdeel a om te bewijzen dat $\mathcal{B}_V$ een basis is van V.
(*Hint:* Uit $f = 0$ volgt in het bijzonder dat $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = 0$ voor elk element $g \in \mathcal{B}_V$.)

(5) **c.** Beargumenteer dat de set $\mathcal{B}_W$ een basis is van W.

Beschouw de afbeelding $A : V \to W : f \mapsto A(f)$ gegeven door

$$A(f) = \{a_0, a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots\}\,.$$

Hierin zijn de reële getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ precies de coëfficiënten van f ten opzichte van de basis $\mathcal{B}_V$ en is i het imaginaire eenheidsgetal ($i^2 = -1$).

(5) **d.** Bewijs dat A een lineaire afbeelding is.

Met A_N bedoelen we de lineaire afbeelding A beperkt tot de deelruimte V_N opgespannen door $\mathcal{B}_{V_N} = \{c_0, c_1, \ldots, c_N, s_1, \ldots, s_N\}$ voor vast gekozen $N \in \mathbb{N}$.

($2\frac{1}{2}$) **e1.** Bewijs dat V_N een lineaire deelruimte is van V.

($2\frac{1}{2}$) **e2.** Bewijs dat $W_N \stackrel{\text{def}}{=} A(V_N) = \{A(f) \in W \mid f \in V_N\}$ een lineaire deelruimte is van W met basis $\mathcal{B}_{W_N} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_{N+1}\}$.

(5) **f.** Bepaal de matrix behorende bij de lineaire afbeelding A_N ten opzichte van de bases $\mathcal{B}_{V_N}$ en $\mathcal{B}_{W_N}$.

(*25*) **3.** In deze opgave beschouwen we een periodiek signaal $f_{a,c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd als volgt:

$$f_{a,c}(t) = a\cos(ct) \quad \text{met } a, c > 0 \text{ constanten.}$$

We hanteren verder de volgende Fourierconventie:

$$\widehat{u}(\omega) = \mathcal{F}(u)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, u(t)\, dt \qquad \text{en dus} \qquad u(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u})(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, \widehat{u}(\omega)\, d\omega\,.$$

De gewone, inhomogene differentiaalvergelijking

$$u'' + k^2\, u = f_{a,c} \quad \text{met } k > 0 \text{ constant}$$

staat model voor een ongedempte, aangedreven harmonische oscillator, met aandrijvende kracht $f_{a,c}$. We nemen aan dat $k \neq c$. De algemene oplossing van dit inhomogene probleem kan geschreven worden als som van een zogenaamde *particuliere oplossing* u_{part} en de algemene oplossing van het bijbehorende homogene probleem, $u'' + k^2\, u = 0$, de *homogene oplossing* u_{hom}. We gaan achtereenvolgens kijken naar een reëelwaardige particuliere oplossing (a) en naar de reëelwaardige homogene oplossing (b).

(5) **a1.** Toon aan dat de Fouriergetransformeerde $\widehat{f}_{a,c} = \mathcal{F}(f_{a,c})$ van $f_{a,c}$ gegeven wordt door

$$\widehat{f}_{a,c}(\omega) = \pi\, a \left(\delta(\omega + c) + \delta(\omega - c)\right)\,.$$

(5) **a2.** Herformuleer de inhomogene differentiaalvergelijking tot een vergelijking voor $\widehat{u}$ en $\widehat{f}_{a,c}$.

($2\frac{1}{2}$) **a3.** Laat zien dat een, bijna overal gedefinieerde, particuliere oplossing gegeven wordt door

$$\widehat{u}_{\text{part}}(\omega) = \frac{\widehat{f}_{a,c}(\omega)}{k^2 - \omega^2}\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **a4.** Bewijs dat de corresponderende oplossing in temporele representatie gegeven wordt door

$$u_{\text{part}}(t) = \frac{f_{a,c}(t)}{k^2 - c^2}\,.$$

De algemene homogene oplossing u_{hom} van het homogene probleem

$$u'' + k^2\, u = 0$$

luidt $u_{\text{hom}}(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt)$ met A, B willekeurige constanten.

($2\frac{1}{2}$) **b1.** Herformuleer de homogene differentiaalvergelijking tot een vergelijking voor $\widehat{u}$.

($2\frac{1}{2}$) **b2.** Beargumenteer dat voor de oplossing $\widehat{u}_{\text{hom}}$ moet gelden $\widehat{u}_{\text{hom}}(\omega) = 0$ voor alle $\omega \neq \pm k$.

($2\frac{1}{2}$) **b3.** Bepaal de Fouriergetransformeerde $\widehat{u}_{\text{hom}}$ van u_{hom}.

($2\frac{1}{2}$) **b4.** Is deze oplossing consistent met je bevinding in onderdeel b2?

(*15*) **4.** Stel $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ is een Schwartz functie. We duiden haar n-de orde afgeleide aan met $\phi^{(n)}$.

($7\frac{1}{2}$) **a.** Bewijs dat

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, \phi^{(n)}(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, dx \,.$$

(*Hint:* Partiële integratie.)

Stel $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ is de reguliere getemperde distributie gegeven door de functie f met functievoorschrift $f(x) = x^n$.

b. Bepaal

($2\frac{1}{2}$) **b1.** de klassieke n-de orde afgeleide $f^{(n)}$ van f (er wordt hier dus gevraagd naar een functie), evenals

($2\frac{1}{2}$) **b2.** de distributionele n-de orde afgeleide $T_f^{(n)}$ van T_f (er wordt hier dus gevraagd naar een getemperde distributie).

($2\frac{1}{2}$) **b3.** Geldt $T_f^{(n)} = T_{f^{(n)}}$?

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam: Studentnummer:

2	0	0
4	–6	3
0	4	0

Figuur 1: Nogmaals het 3×3-beeld zoals gegeven in vraag 1.

(a) f_1

(b) f_2

(c) f_∞

Figuur 2: Vul pixelwaarden in overeenkomstig je antwoord op onderdelen c1–c3 van vraag 1.