# TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: dinsdag 29 april 2008. Tijd: 14:00–17:00.

**Lees dit vóórdat je begint!**

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van collegedictaat en calculator is toegestaan. Het gebruik van de opgaven- en tentamenbundel is *niet* toegestaan.

*VEEL SUCCES!*

(*25*) **1.** We bekijken de volgende geordende verzameling bestaande uit 4 elementen:

$$\mathscr{K} = \{E, I, J, K\} \ .$$

We voorzien deze verzameling van een gesloten, associatieve interne operator $\circ : \mathscr{K} \times \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ met de volgende eigenschappen:

$$\begin{aligned} I \circ I &= E \\ J \circ J &= E \\ K \circ K &= E \\ I \circ J &= K \end{aligned}$$

Hierin fungeert $E$ als eenheidselement. Tenzij anders aangegeven gaan we er vooralsnog *niet* van uit dat $\mathscr{K}$ een groep vormt. Evenmin veronderstellen we dat $\circ$ commutatief is.

($2\frac{1}{2}$) **a.** Neem onderstaande vermenigvuldigingstabel ($4 \times 4$-matrix) over (of gebruik de bijlage) en vul deze, *voor zover mogelijk*, in. Je hoeft in deze opgave nog niet aan te geven hoe je aan je resultaat gekomen bent. Conventie: Als $x_i \in \mathscr{K}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) duidt op het $i$-de element (dus $x_1 = E$, $x_2 = I$, $x_3 = J$, $x_4 = K$), dan is $x_i \circ x_j$ het element op de $i$-de rij in de $j$-de kolom ($i, j = 1, 2, 3, 4$):

| $\circ$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|
| $E$ | | | | |
| $I$ | | | | |
| $J$ | | | | |
| $K$ | | | | |

Hieronder zijn uitsluitend die vakjes ingevuld waarvoor het resultaat expliciet gegeven is in de definities hierboven:

| $\circ$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
| $I$ | $I$ | $E$ | $K$ | |
| $J$ | $J$ | | $E$ | |
| $K$ | $K$ | | | $E$ |

($2\frac{1}{2}$) **b.** Verklaar je resultaat met betrekking tot de vier diagonaalelementen.

Gegeven $I \circ I = J \circ J = K \circ K = E \circ E = E$. De voorlaatste gelijkheid volgt uit het feit dat $E$ eenheidselement is, de overige gelijkheden zijn expliciet gegeven.

($2\frac{1}{2}$) **c.** Verklaar je resultaat met betrekking tot de eerste rij en eerste kolom.

Aangezien $E$ eenheidselement is geldt per definitie $E \circ E = E$, $I \circ E = E \circ I = I$, $J \circ E = E \circ J = J$, $K \circ E = E \circ K = K$.

(5) **d.** Leg uit hoe je aan de resterende elementen, voor zover bekend, gekomen bent.

Expliciet gegeven is $I \circ J = K$.

Verder geldt $I \circ K = I \circ (I \circ J) = (I \circ I) \circ J = E \circ J = J$ en, analoog, $K \circ J = (I \circ J) \circ J = I \circ (J \circ J) = I \circ E = I$ op grond van associativiteit en definities.

Verder is $J \circ I = (J \circ I) \circ E = (J \circ I) \circ (K \circ K) = ((J \circ I) \circ K) \circ K = ((J \circ I) \circ (I \circ J)) \circ K = (((J \circ I) \circ I) \circ J) \circ K = ((J \circ (I \circ I)) \circ J) \circ K = ((J \circ E) \circ J) \circ K = (J \circ J) \circ K = E \circ K = K$, of ook als volgt: $J \circ I = E \circ (J \circ I) = (K \circ K) \circ (J \circ I) = K \circ (K \circ (J \circ I)) = K \circ ((I \circ J) \circ (J \circ I)) = K \circ (I \circ (J \circ (J \circ I))) = K \circ (I \circ ((J \circ J) \circ I)) = K \circ (I \circ (E \circ I)) = K \circ (I \circ I) = K \circ E = K$.

Voor de produkten $J \circ K$ en $K \circ I$ tenslotte kunnen we het volgende afleiden: $J \circ K = E \circ (J \circ K) = (K \circ K) \circ (J \circ K) = (K \circ (I \circ J)) \circ (J \circ K) = K \circ ((I \circ J) \circ (J \circ K)) = K \circ (I \circ (J \circ (J \circ K))) = K \circ (I \circ ((J \circ J) \circ K)) = K \circ (I \circ (E \circ K)) = K \circ (I \circ K) = K \circ J = I$, waarbij de laatste twee gelijkheden volgen uit wat eerder bewezen is.

Net zo: $K \circ I = (K \circ I) \circ E = (K \circ I) \circ (K \circ K) = K \circ ((I \circ (K \circ K))) = K \circ ((I \circ K) \circ K) = K \circ ((I \circ (I \circ J)) \circ K) = K \circ (((I \circ I) \circ J) \circ K) = K \circ ((E \circ J) \circ K) = K \circ (J \circ K) = (K \circ J) \circ K = I \circ K = J$, waarbij de laatste twee gelijkheden volgen uit wat eerder bewezen is. Dit kan ook sneller, nl. als volgt: $K \circ I = K \circ (J \circ K) = (K \circ J) \circ K = I \circ K = J$. Hierbij is het voorlaatste resultaat, $J \circ K = I$, gebruikt in de eerste gelijkheid.

De volledige vermenigvuldigingstabel ziet er dus als volgt uit:

| $\circ$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
| $I$ | $I$ | $E$ | $K$ | $J$ |
| $J$ | $J$ | $K$ | $E$ | $I$ |
| $K$ | $K$ | $J$ | $I$ | $E$ |

Als alternatief kun je de diagonaal- en bovendiagonaalelementen in de vermenigvuldigingstabel bepalen, zoals hierboven, en vervolgens commutativiteit aantonen, waarmee je de onderdiagonaal kunt aanvullen (spiegelsymmetrie). Dit laatste gaat als volgt: Voor alle $X \in \mathscr{K}$ geldt, per definitie, $X \circ X = E$, dus o.g.v. geslotenheid geldt ook $(X \circ Y) \circ (X \circ Y) = E$ voor alle $X, Y \in \mathscr{K}$. Ergo, gebruik makend van associativiteit, $X \circ Y = X \circ ((X \circ Y) \circ (X \circ Y)) \circ Y = (X \circ X) \circ (Y \circ X) \circ (Y \circ Y) = Y \circ X$.

Tenslotte: zie **f.** voor de meest eenvoudige en elegante oplossing.

(5) **e.** Bewijs dat $\mathscr{K}$ een groep vormt ten aanzien van de operator $\circ$.

Geslotenheid, associativiteit en eenheidselement zijn gegeven. De enige niet expliciet gegeven eigenschap is inverteerbaarheid. Uit de diagonaal in de tabel blijkt echter dat elk element zijn eigen (unieke) inverse is.

($2\frac{1}{2}$) **f.** Bewijs dat een rij of kolom niet tweemaal hetzelfde element mag bevatten.
(*Hint:* Stel $x_i \circ x_j = x_i \circ x_k$ voor vast gekozen $i$ en $j \neq k$ en gebruik **e**.)

Stel $x_i \circ x_j = x_i \circ x_k$ voor vast gekozen $i$ en $j \neq k$. Vermenigvuldig linkszijdig met $x_i^{-1}$. Resultaat, gebruik makend van de groepseigenschappen: $x_j = x_k$. Dit is echter een tegenspraak.

De vermenigvuldigingstabel is kennelijk een "Sudoku". De gegeven elementen volstaan om dit puzzeltje geheel op te lossen! (Merk op dat je bij dit onderdeel geen gebruik hoeft te maken van niet expliciet gegeven elementen in de tabel.)

Tenslotte poneren we de stelling dat we $E, I, J, K$ kunnen voorstellen als $2\times 2$-matrices met reëelwaardige elementen en met het standaard matrixprodukt als groepsoperator, zodanig dat aan dezelfde vermenigvuldigingsregels uit de tabel is voldaan.

(5) **g.** Geef een constructief bewijs van deze stelling, d.w.z. construeer een viertal $2 \times 2$ matrices $E, I, J, K$ die hieraan voldoen.

Vier matrices die voldoen aan de regels in de vermenigvuldigingstabel zijn diag $\{\pm 1, \pm 1\}$. De eenheidsmatrix $E$ moeten we identificeren met de identiteitsmatrix diag $\{1, 1\}$, $I, J, K$ kunnen naar keuze geïdentificeerd worden met de overige drie matrices. Bijvoorbeeld:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Opmerking: De triviale oplossing, waarbij $I = J = K = E$ (alle identiteitsmatrix), voldoet weliswaar aan de vermenigvuldigingstabel, maar is gebaseerd op een ongegronde aanname.

♣

(*40*) **2.** Beschouw de matrixverzameling

$$\mathbb{M} = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

We voorzien deze verzameling van de gebruikelijke regels voor optelling en scalairvermenigvuldiging en voegen hieraan toe het gebruikelijke matrixprodukt.

(5) **a.** Bewijs dat $\mathbb{M}$, voorzien van optelling en scalairvermenigvuldiging, een lineaire ruimte vormt.

Stel $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ en

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} , \quad Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \quad \text{met alle } x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in \mathbb{R} \text{ willekeurig.}$$

De gebruikelijke regels voor optelling en scalairvermenigvuldiging volgen uit de definitie $(\lambda X + \mu Y)_{ij} = \lambda x_{ij} + \mu y_{ij}$.

- Associativiteit: $((X + Y) + Z)_{ij} = (X + Y)_{ij} + z_{ij} = (x_{ij} + y_{ij}) + z_{ij} = x_{ij} + (y_{ij} + z_{ij}) = x_{ij} + (Y + Z)_{ij} = (X + (Y + Z))_{ij}$, dus $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$.
- De nulmatrix $O$, met elementen $o_{ij} = 0$, is neutraal element: $(O+X)_{ij} = o_{ij}+x_{ij} = 0+x_{ij} = x_{ij}$, dus $O+X = X$.
- Het tegengestelde element bij $X$ is de matrix $-X$, gedefinieerd door $(-X)_{ij} = -x_{ij}$, immers $(X + (-X))_{ij} = x_{ij} + (-x_{ij}) = 0 = o_{ij}$, dus $X + (-X) = O$.
- Commutativiteit: $(X + Y)_{ij} = x_{ij} + y_{ij} = y_{ij} + x_{ij} = (Y + X)_{ij}$, dus $X + Y = Y + X$.

Voorts (scalairvermenigvuldiging heeft voorrang op vectoroptelling tenzij haakjes een andere prioriteit aangeven):

- $(\lambda\,(X+Y))_{ij} = \lambda\,(X+Y)_{ij} = \lambda\,(x_{ij}+y_{ij}) = \lambda\,x_{ij} + \lambda\,y_{ij} = (\lambda\,X)_{ij} + (\lambda\,Y)_{ij} = (\lambda\,X + \lambda\,Y)_{ij}$, dus $\lambda\,(X+Y) = \lambda\,X + \lambda\,Y$.
- $((\lambda+\mu)\,X)_{ij} = (\lambda+\mu)\,x_{ij} = \lambda\,x_{ij} + \mu\,x_{ij} = (\lambda\,X)_{ij} + (\mu\,X)_{ij} = (\lambda\,X + \mu\,X)_{ij}$, dus $(\lambda+\mu)\,X = \lambda\,X + \mu\,X$.
- $((\lambda\,\mu)\,X)_{ij} = (\lambda\,\mu)\,x_{ij} = \lambda(\mu\;x_{ij}) = \lambda\,(\mu\,X)_{ij} = (\lambda\,(\mu\,X))_{ij}$, dus $(\lambda\,\mu)\,X = \lambda\,(\mu\,X)$.
- $(1\,X)_{ij} = 1\,x_{ij} = x_{ij}$, dus $1\,X = X$.

(5) **b.** Bewijs dat $\mathbb{M}$, voorzien van matrixvermenigvuldiging, een algebra vormt.

Stel $\lambda \in \mathbb{R}$ en

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \quad \text{met alle } x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} \in \mathbb{R} \text{ willekeurig.}$$

- Associativiteit: $((XY)Z)_{ij} = \sum_k (XY)_{ik} z_{kj} = \sum_{k\ell} (x_{i\ell} y_{\ell k}) z_{kj} = \sum_{k\ell} x_{i\ell}(y_{\ell k} z_{kj}) = \sum_\ell x_{i\ell}(YZ)_{\ell j} = (X(YZ))_{ij}$, dus $(XY)Z = X(YZ)$.
- $(X(Y+Z))_{ij} = \sum_k x_{ik}(Y+Z)_{kj} = \sum_k x_{ik}(y_{kj}+z_{kj}) = \sum_k x_{ik}y_{kj} + \sum_k x_{ik}z_{kj} = (XY)_{ij} + (XZ)_{ij} = (XY+XZ)_{ij}$ dus $X(Y+Z) = XY + XZ$.
- $((X+Y)Z)_{ij} = \sum_k (X+Y)_{ik} z_{kj} = \sum_k (x_{ik}+y_{ik}) z_{kj} = \sum_k x_{ik}z_{kj} + \sum_k y_{ik}z_{kj} = (XZ)_{ij} + (YZ)_{ij} = (XZ+YZ)_{ij}$, dus $(X+Y)Z = XZ + YZ$.
- $(\lambda(XY))_{ij} = \lambda(XY)_{ij} = \sum_k \lambda(x_{ik}y_{kj}) = \sum_k (\lambda x_{ik}) y_{kj} = \sum_k (\lambda X)_{ik} y_{kj} = ((\lambda X)Y)_{ij}$, ergo $\lambda(XY) = (\lambda X)Y$. Op soortgelijke wijze bewijs je dat $\lambda(XY) = X(\lambda Y)$.

**c.** De volgende vragen hebben betrekking op het matrixprodukt.

($2\frac{1}{2}$) **c1.** Is $\mathbb{M}$ een reguliere algebra? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Nee: singuliere matrices $S \in \mathbb{M}$, d.w.z. matrices waarvoor $\det S = 0$, hebben geen inverse.

($2\frac{1}{2}$) **c2.** Is $\mathbb{M}$ commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Nee: matrices $A, B \in \mathbb{M}$ commuteren i.h.a. niet. Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{leveren een commutator} \quad [A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verder beschouwen we de verzameling van reëelwaardige analytische functies $C^\omega(\mathbb{R})$. Voor een functie $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ geldt dat zij geschreven kan worden als een convergente machtreeks:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n\,,$$

voor zekere $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Laat zien dat $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)$. Het superscript geeft afgeleide orde aan.

(*Hint:* Je mag aannemen dat differentiëren en sommeren omgewisseld mogen worden.)

Gebruik makend van de hint (bij $*$) vinden we (let op dat je $n$ niet als sommatiedummy gebruikt!)

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, x^k \Big|_{x=0} \overset{*}{=} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \frac{d^n x^k}{dx^n}\Big|_{x=0} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k n! \delta_{kn} = a_n \, .$$

In de voorlaatste stap is gebruik gemaakt van de observatie dat

$$\frac{d^n x^k}{dx^n}\Big|_{x=0} = n! \quad \text{als } k = n,$$

terwijl dit nul oplevert indien $k \neq n$.

Met iedere $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ associëren we een gelijknamige functie van het type

$$f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} : X \mapsto f(X) \, ,$$

als volgt:

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, X^n \, .$$

De coëfficiënten zijn dezelfde als die van de bijbehorende functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, zie hierboven.

We nemen hieronder als concreet voorbeeld de exponentiële functie:

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = e^x \, .$$

($2\frac{1}{2}$) **e.** Geef de Taylorreeksontwikkeling van deze functie.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

**f.** Bereken achtereenvolgens $e^X$ voor de volgende matrices (alle parameters zijn reëel):

($2\frac{1}{2}$) **f1.** $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$;

($2\frac{1}{2}$) **f2.** $X = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

($2\frac{1}{2}$) **f3.** $X = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$;

($2\frac{1}{2}$) **f4.** $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$.

Om $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ te bepalen moeten we allereerst de betreffende machten van $X$ bij elk onderdeel bepalen. Vervolgens kunnen we de sommatie coëfficiëntsgewijs uitvoeren.

**f1.** $X^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$. Dus $e^X = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$.

**f2.** $X^n = \begin{pmatrix} 1 & n\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dus $e^X = \begin{pmatrix} e & \gamma e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

**f3.** We moeten hier onderscheid maken tussen even en oneven exponent. Als $n \in \mathbb{N}_0$ vinden we $X^{2n} = \begin{pmatrix} \delta^{2n} & 0 \\ 0 & \delta^{2n} \end{pmatrix}$, respectievelijk $X^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{2n+1} \\ \delta^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$. Dus $e^X = \begin{pmatrix} \cosh\delta & \sinh\delta \\ \sinh\delta & \cosh\delta \end{pmatrix}$.

**f4.** Voor $n \geq 2$ vinden we $X^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dus $e^X = I + X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$.

(5) **h.** Bewijs: $e^X\, e^Y = e^{X+Y}$ voor alle $X, Y \in \mathbb{M}$ waarvoor geldt $[X,Y] \stackrel{\text{def}}{=} XY - YX = 0$. Geef duidelijk aan waar je in je bewijs de commutativiteitseis nodig hebt.
(*Hint:* Gebruik het binomium van Newton, maar hou rekening met je antwoord bij **c2**.)

Enerzijds hebben we

$$e^X\, e^Y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^m\, Y^n}{m!n!}\,.$$

Anderzijds, door gebruik te maken van het Binomium van Newton en commutativiteit, waardoor we alle factoren $X$ en $Y$ naar believen mogen ordenen (bij $*$),

$$e^{X+Y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X+Y)^k}{k!} \stackrel{*}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} X^{k-j}\, Y^j \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{j!(k-j)!} X^{k-j}\, Y^j \stackrel{\star}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} X^i\, Y^j = e^X\, e^Y\,.$$

Bij $\circ$ hebben we de sommatievolgorde verwisseld en de gemeenschappelijke factor in teller en noemer weggestreept. Bij $\star$ hebben we een substitutie van sommatiedummy $k$ uitgevoerd: $k - j = i$ ($j$ vast in binnenste som). De laatste stap volgt door vergelijking met voorgaand.

(5) **i.** Geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat $e^X\, e^Y = e^{X+Y}$ niet voor alle $X, Y \in \mathbb{M}$ geldt.
(*Hint:* Gebruik **f2** en **f4**.)

De hint volgend, stel $\gamma = \epsilon = 1$ in **f2** en **f4** voor respectievelijk de matrices $X$ en $Y$ (merk op dat dan geldt $XY \neq YX$), dan volgt uit voorgaande

$$e^X\, e^Y = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e & e \\ e & e \end{pmatrix}.$$

Anderzijds is

$$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dus voor $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(X+Y)^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

ergo,

$$e^{X+Y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2e & e \\ e & e \end{pmatrix} = e^X\, e^Y\,.$$

♣

(*15*) **3.** We bekijken een analogie van de Riemannsom definitie van een *additieve integraal*:

$$\int_0^t f(s)\, ds = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \sum_{k=1}^{N} f(s_k^*)\, \Delta s \qquad (f \in C([0,t]))\ ,$$

met $s_k^* \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, \ldots, N$, voor zekere partitionering $\{s_k = k\,t/N \mid k = 0, \ldots, N\}$ van het interval $[0,t]$ in $N$ subintervalletjes van gelijke norm $s_k - s_{k-1} = \Delta s$. Met de toevoeging "additief" benadrukken we het onderscheid met de zogenaamde *multiplicatieve integraal*, die we hieronder als volgt invoeren (gebruik makend van dezelfde partitionering als voorheen):

$$\fint_0^t g(s, ds) = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \prod_{k=1}^{N} g(s_k^*, \Delta s)\,.$$

(N.B. De haakjes in de integrand staan zoals het hoort, met $g \in C([0,t] \times \mathbb{R})$.) Het symbool $\prod$ is het multiplicatieve analogon van het sommatiesymbool $\sum$, dus

$$\prod_{k=1}^{N} a_k = a_1 \ldots a_N \quad \text{naar analogie van} \quad \sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + \ldots + a_N\,.$$

(5) **a.** Bereken $\fint_0^t e^{a\,ds}$, gebruik makend van van de definitie. Hierin is $a \in \mathbb{R}$ een constante.

$$\fint_0^t e^{a\,ds} = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \prod_{k=1}^{N} e^{a\Delta s} = \lim_{\Delta s \downarrow 0} e^{aN\Delta s} \overset{*}{=} \lim_{\Delta s \downarrow 0} e^{at} = e^{at}\,.$$

Bij $*$ is gebruikt dat $N\Delta s = t$; de laatste stap is triviaal.

(5) **b.** Idem voor $\fint_0^t e^{a\,s\,ds}$.

(*Hint:* $\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{2}N(N+1)$.)

$$\fint_0^t e^{a\,s\,ds} \overset{*}{=} \lim_{\Delta s \downarrow 0} \prod_{k=1}^{N} e^{as_k\Delta s} = \lim_{\Delta s \downarrow 0} e^{a\Delta s \sum_{k=1}^{N} s_k} \overset{\star}{=} \lim_{\Delta s \downarrow 0} e^{\frac{at\Delta s}{N} \sum_{k=1}^{N} k} \overset{\circ}{=} \lim_{\Delta s \downarrow 0} e^{\frac{at\Delta s}{2}(N+1)} \overset{\bullet}{=} \lim_{\Delta s \downarrow 0} e^{\frac{at^2 + at\Delta s}{2}} = e^{\frac{1}{2}at^2}\,.$$

Bij $*$ hebben we $s_k^* = s_k$ gekozen. Bij $\star$ hebben we gebruikt dat $s_k = kt/N$. Bij $\circ$ is de hint toegepast. Bij $\bullet$ is de definitie $N\Delta s = t$ gebruikt en in de laatste stap is de limiet uitgevoerd.

(5) **c.** Bewijs door gebruik te maken van additieve en multiplicatieve integraal definities:

$$\fint_0^t \exp\left(f(s)\, ds\right) = \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right)\,.$$

(Hierin is $\exp(x)$ synoniem voor $e^x$.)

$$\fint_0^t \exp\left(f(s)\,ds\right) = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \prod_{k=1}^{N} \exp\left(f(s_k^*)\Delta s\right) = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \exp\left(\sum_{k=1}^{N} f(s_k^*)\Delta s\right) \overset{\star}{=} \exp\left(\lim_{\Delta s \downarrow 0} \sum_{k=1}^{N} f(s_k^*)\Delta s\right) \overset{*}{=} \exp\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)\,.$$

Bij $*$ hebben we de definitie van de (additieve) Riemannsom gebruikt, nadat we bij $\star$ de limiet binnen het argument van de exp-functie hebben gebracht (dit mag vanwege continuïteit).

♣

(*20*) **4.** Beschouw het volgende beginwaardenprobleem voor de functie $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} & = & \Delta u(x,t) - c \cdot \nabla u(x,t) & \text{voor } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Hierin is $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een reëelwaardig beeld, $c \in \mathbb{R}^n$ een constante vector, met componenten

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

en

$$c \cdot \nabla u \stackrel{\text{def}}{=} c_1 \frac{\partial u}{\partial x^1} + \ldots + c_n \frac{\partial u}{\partial x^n}.$$

We nemen aan dat rand- en beginvoorwaarden zodanig zijn dat dit beginwaardenprobleem een eenduidige, voldoende nette oplossing heeft.

In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie. Voor (voldoende nette) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiëren we de functie $\widehat{u} = \mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ als volgt:

$$\widehat{u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \cdot x} \, u(x) \, dx \qquad \text{oftewel} \qquad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega \cdot x} \, \widehat{u}(\omega) \, d\omega ,$$

waarin $\omega \cdot x$ staat voor $\omega_1 \, x_1 + \ldots + \omega_n \, x_n$. Kortheidshalve schrijven we verder $\|x\|^2 = x \cdot x$, $\|\omega\|^2 = \omega \cdot \omega$, respectievelijk $c \cdot \omega = c_1 \, \omega_1 + \ldots + c_n \, \omega_n$.

In onderstaande opgaven mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2} \, dx = \sqrt{\pi} \qquad \text{ongeacht de waarde van } y \in \mathbb{R}.$$

($7\frac{1}{2}$) **a.** Laat zien dat bovenstaand beginwaardenprobleem equivalent is met het volgende beginwaardenprobleem in het Fourierdomein en bepaal de oplossing $\widehat{u}(\omega, t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{u}(\omega,t)}{dt} & = & -\|\omega^2\| \, \widehat{u}(\omega,t) - i \, c \cdot \omega \, \widehat{u}(\omega,t) & \text{voor } (\omega,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ \widehat{u}(\omega,0) & = & \widehat{f}(\omega) & \text{voor } \omega \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(*Hint:* Poneer een oplossing van het type $\widehat{u}(\omega,t) = Ae^{Bt}$ en bepaal de ($\omega$-afhankelijke) parameters $A, B$.)

Dit volgt door gebruik te maken van lineariteit van Fouriertransformatie en van de voor bovenstaande Fourierconventie geldende formele identiteit

$$\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = i\omega_i \quad \text{voor } i = 1, \ldots, n, \text{ dus in het bijzonder } \mathcal{F}(\Delta) = -\|\omega\|^2 \text{ en } \mathcal{F}(c \cdot \nabla) = i \, c \cdot \omega.$$

Door vervolgens $\widehat{u}(\omega, t) = Ae^{Bt}$ in te vullen in de differentiaalvergelijking vind je $B = -\|\omega^2\| - i \, c \cdot \omega$. Door de beginvoorwaarde op te leggen vind je $A = \widehat{f}(\omega)$. De oplossing is dus

$$\widehat{u}(\omega, t) = \widehat{f}(\omega) \, e^{-(\|\omega^2\| + i \, c \cdot \omega) \, t}.$$

$(7\frac{1}{2})$ **c.** Laat zien dat voor vaste $t \in \mathbb{R}^+$ de spatiële oplossing gegeven wordt door een convolutieprodukt van de vorm

$$u(x,t) = (\phi_t * f)(x)\,,$$

en bepaal het functievoorschrift $\phi_t(x)$ van het spatiële convolutiefilter $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hierin.

Uit onderdeel b volgt

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{f}(\omega)\,\widehat{\phi}_t(\omega) \quad \text{waarin } \widehat{\phi}_t(\omega) = e^{-(\|\omega^2\| + i\,c\cdot\omega)\,t}\,.$$

Een functieprodukt in het Fourierdomein correspondeert met een convolutieprodukt in het spatiële domein, dus

$$u(x,t) = (f * \phi_t)(x)\,.$$

(Let op: $t$ wordt hier wederom als een constante parameter beschouwd en speelt dus geen rol in de convolutie-integraal.) Hierin is $\phi_t = \mathcal{F}^{\text{inv}}(\widehat{\phi}_t)$, d.i. het spatiële convolutiefilter met Fourierrepresentatie $\widehat{\phi}_t(\omega)$. Fourierinversie levert:

$$\phi_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x}\,\widehat{\phi}_t(\omega)\,d\omega = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x - (\|\omega^2\| + i\,c\cdot\omega)t}\,d\omega = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot(x - c\,t) - \|\omega^2\|t}\,d\omega\,.$$

Bekijk nu de volgende integraal:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot(x-c\,t)-\|\omega^2\|t}\,d\omega \stackrel{*}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{\|x-c\,t\|^2}{4t}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\omega\sqrt{t} - \frac{i(x-c\,t)}{2\sqrt{t}}\|^2}\,d\omega \stackrel{\star}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}e^{-\frac{\|x-c\,t\|^2}{4t}}\frac{1}{\sqrt{t}^{\,n}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\omega' - \frac{i(x-c\,t)}{2\sqrt{t}}\|^2}\,d\omega'\,.$$

Bij $*$ is gebruik gemaakt van de identiteit $i\omega\cdot(x - c\,t) - \|\omega^2\|t = -\|\omega\sqrt{t} - \dfrac{i(x-c\,t)}{2\sqrt{t}}\|^2 - \dfrac{\|x - c\,t\|^2}{4t}$. Bij $\star$ is subsitutie van variabelen gebruikt: $\omega\sqrt{t} = \omega' \in \mathbb{R}^n$ (let op de Jacobiaan!). Tot slot volgt, door gebruik te maken van de gegeven standaard integraal:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\omega' - \frac{i(x-c\,t)}{2\sqrt{t}}\|^2}\,d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega'_1 - \frac{i(x_1 - c_1\,t)}{2\sqrt{t}})^2}\,d\omega'_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega'_n - \frac{i(x_n - c_n\,t)}{2\sqrt{t}})^2}\,d\omega'_n = \sqrt{\pi}^{\,n}\,.$$

Al met al:

$$\phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^{\,n}}\,e^{-\frac{\|x-c\,t\|^2}{4t}}\,.$$

(5) **e.** Bewijs: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)\,dx = 1$.
(*Hint:* Bekijk $\widehat{\phi}_t(\omega)$.)

Zie onderdeel b: $\widehat{\phi}_t(\omega) = e^{-(\|\omega^2\| + i\,c\cdot\omega)\,t}$, dus $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x}\phi_t(x)\,dx\Big|_{\omega\,=\,0} = \widehat{\phi}_t(0) = 1$.

**EINDE**

**BIJLAGE BIJ OPGAVE 1**

Naam: Studentnummer:

| $\circ$ | $E$ | $I$ | $J$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|
| $E$ | | | | |
| $I$ | | | | |
| $J$ | | | | |
| $K$ | | | | |