TENTAMEN WISKUNDIGE BEELDVERWERKINGSTECHNIEKEN

Vakcode: 8D020. Datum: dinsdag 29 april 2008. Tijd: 14:00–17:00.

Lees dit vóórdat je begint!

- Maak iedere opgave op een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert, inclusief de bijlage. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 4 vragen. De waardering per onderdeel staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van collegedictaat en calculator is toegestaan. Het gebruik van de opgaven- en tentamenbundel is *niet* toegestaan.

VEEL SUCCES!

(*25*) **1.** We bekijken de volgende geordende verzameling bestaande uit 4 elementen:

$$\mathscr{K} = \{E, I, J, K\} \ .$$

We voorzien deze verzameling van een gesloten, associatieve interne operator $\circ : \mathscr{K} \times \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ met de volgende eigenschappen:

$$\begin{array}{rcl} I \circ I & = & E \\ J \circ J & = & E \\ K \circ K & = & E \\ I \circ J & = & K \end{array}$$

Hierin fungeert E als eenheidselement. Tenzij anders aangegeven gaan we er vooralsnog *niet* van uit dat $\mathscr{K}$ een groep vormt. Evenmin veronderstellen we dat $\circ$ commutatief is.

($2\frac{1}{2}$) **a.** Neem onderstaande vermenigvuldigingstabel (4×4-matrix) over (of gebruik de bijlage) en vul deze, *voor zover mogelijk*, in. Je hoeft in deze opgave nog niet aan te geven hoe je aan je resultaat gekomen bent. Conventie: Als $x_i \in \mathscr{K}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) duidt op het i-de element (dus $x_1 = E$, $x_2 = I$, $x_3 = J$, $x_4 = K$), dan is $x_i \circ x_j$ het element op de i-de rij in de j-de kolom ($i, j = 1, 2, 3, 4$):

$\circ$	E	I	J	K
E				
I				
J				
K				

($2\frac{1}{2}$) **b.** Verklaar je resultaat met betrekking tot de vier diagonaalelementen.

($2\frac{1}{2}$) **c.** Verklaar je resultaat met betrekking tot de eerste rij en eerste kolom.

(5) **d.** Leg uit hoe je aan de resterende elementen, voor zover bekend, gekomen bent.

(5) **e.** Bewijs dat $\mathscr{K}$ een groep vormt ten aanzien van de operator $\circ$.

($2\frac{1}{2}$) **f.** Bewijs dat een rij of kolom niet tweemaal hetzelfde element mag bevatten.
(*Hint:* Stel $x_i \circ x_j = x_i \circ x_k$ voor vast gekozen i en $j \neq k$ en gebruik **e**.)

Tenslotte poneren we de stelling dat we E, I, J, K kunnen voorstellen als 2×2-matrices met reëelwaardige elementen en met het standaard matrixprodukt als groepsoperator, zodanig dat aan dezelfde vermenigvuldigingsregels uit de tabel is voldaan.

(5) **g.** Geef een constructief bewijs van deze stelling, d.w.z. construeer een viertal 2×2 matrices E, I, J, K die hieraan voldoen.

♣

(*40*) **2.** Beschouw de matrixverzameling

$$\mathbb{M} = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} .$$

We voorzien deze verzameling van de gebruikelijke regels voor optelling en scalairvermenigvuldiging en voegen hieraan toe het gebruikelijke matrixprodukt.

(5) **a.** Bewijs dat $\mathbb{M}$, voorzien van optelling en scalairvermenigvuldiging, een lineaire ruimte vormt.

(5) **b.** Bewijs dat $\mathbb{M}$, voorzien van matrixvermenigvuldiging, een algebra vormt.

c. De volgende vragen hebben betrekking op het matrixprodukt.

($2\frac{1}{2}$) **c1.** Is $\mathbb{M}$ een reguliere algebra? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

($2\frac{1}{2}$) **c2.** Is $\mathbb{M}$ commutatief? Zo ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

Verder beschouwen we de verzameling van reëelwaardige analytische functies $C^\omega(\mathbb{R})$. Voor een functie $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ geldt dat zij geschreven kan worden als een convergente machtreeks:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n ,$$

voor zekere $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

($2\frac{1}{2}$) **d.** Laat zien dat $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)$. Het superscript geeft afgeleide orde aan.
(*Hint:* Je mag aannemen dat differentiëren en sommeren omgewisseld mogen worden.)

Met iedere $f \in C^{\omega}(\mathbb{R})$ associëren we een gelijknamige functie van het type

$$f : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M} : X \mapsto f(X)\,,$$

als volgt:

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, X^n\,.$$

De coëfficiënten zijn dezelfde als die van de bijbehorende functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, zie hierboven.

We nemen hieronder als concreet voorbeeld de exponentiële functie:

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = e^x\,.$$

($2\frac{1}{2}$) **e.** Geef de Taylorreeksontwikkeling van deze functie.

f. Bereken achtereenvolgens e^X voor de volgende matrices (alle parameters zijn reëel):

($2\frac{1}{2}$) **f1.** $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$;

($2\frac{1}{2}$) **f2.** $X = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

($2\frac{1}{2}$) **f3.** $X = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$;

($2\frac{1}{2}$) **f4.** $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$.

(5) **h.** Bewijs: $e^X\, e^Y = e^{X+Y}$ voor alle $X, Y \in \mathbb{M}$ waarvoor geldt $[X, Y] \stackrel{\text{def}}{=} XY - YX = 0$. Geef duidelijk aan waar je in je bewijs de commutativiteitseis nodig hebt.
(*Hint:* Gebruik het binomium van Newton, maar hou rekening met je antwoord bij **c2**.)

(5) **i.** Geef een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat $e^X\, e^Y = e^{X+Y}$ niet voor alle $X, Y \in \mathbb{M}$ geldt.
(*Hint:* Gebruik **f2** en **f4**.)

♣

(*15*) **3.** We bekijken een analogie van de Riemannsom definitie van een *additieve integraal*:

$$\int_0^t f(s)\, ds = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \sum_{k=1}^{N} f(s_k^*)\, \Delta s \qquad (f \in C([0,t]))\,,$$

met $s_k^* \in [s_{k-1}, s_k]$, $k = 1, \ldots, N$, voor zekere partitionering $\{s_k = k\, t/N \mid k = 0, \ldots, N\}$ van het interval $[0, t]$ in N subintervalletjes van gelijke norm $s_k - s_{k-1} = \Delta s$. Met de toevoeging “additief” benadrukken we het onderscheid met de zogenaamde *multiplicatieve integraal*, die we hieronder als volgt invoeren (gebruik makend van dezelfde partitionering als voorheen):

$$\int\!\!\!\!\!\!-_0^t g(s, ds) = \lim_{\Delta s \downarrow 0} \prod_{k=1}^N g(s_k^*, \Delta s)\,.$$

(N.B. De haakjes in de integrand staan zoals het hoort, met $g \in C([0,t] \times \mathbb{R})$.) Het symbool $\prod$ is het multiplicatieve analogon van het sommatiesymbool $\sum$, dus

$$\prod_{k=1}^N a_k = a_1 \ldots a_N \quad \text{naar analogie van} \quad \sum_{k=1}^N a_k = a_1 + \ldots + a_N\,.$$

(5) **a.** Bereken $\int\!\!\!\!\!\!-_0^t e^{a\,ds}$, gebruik makend van van de definitie. Hierin is $a \in \mathbb{R}$ een constante.

(5) **b.** Idem voor $\int\!\!\!\!\!\!-_0^t e^{a\,s\,ds}$.
(*Hint:* $\sum_{k=1}^N k = \frac{1}{2}N(N+1)$.)

(5) **c.** Bewijs door gebruik te maken van additieve en multiplicatieve integraal definities:

$$\int\!\!\!\!\!\!-_0^t \exp\left(f(s)\,ds\right) = \exp\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)\,.$$

(Hierin is $\exp(x)$ synoniem voor e^x.)

♣

(*20*) **4.** Beschouw het volgende beginwaardenprobleem voor de functie $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) - c \cdot \nabla u(x,t) & \text{voor } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{voor } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Hierin is $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een reëelwaardig beeld, $c \in \mathbb{R}^n$ een constante vector, met componenten

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

en

$$c \cdot \nabla u \stackrel{\text{def}}{=} c_1 \frac{\partial u}{\partial x^1} + \ldots + c_n \frac{\partial u}{\partial x^n}\,.$$

We nemen aan dat rand- en beginvoorwaarden zodanig zijn dat dit beginwaardenprobleem een eenduidige, voldoende nette oplossing heeft.

In deze opgave hanteren we de volgende Fourierconventie. Voor (voldoende nette) $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiëren we de functie $\widehat{u} = \mathcal{F}(u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ als volgt:

$$\widehat{u}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega\cdot x}\, u(x)\, dx \qquad \text{oftewel} \qquad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\omega\cdot x}\, \widehat{u}(\omega)\, d\omega\,,$$

waarin $\omega \cdot x$ staat voor $\omega_1\, x_1 + \ldots + \omega_n\, x_n$. Kortheidshalve schrijven we verder $\|x\|^2 = x \cdot x$, $\|\omega\|^2 = \omega \cdot \omega$, respectievelijk $c \cdot \omega = c_1\, \omega_1 + \ldots + c_n\, \omega_n$.

In onderstaande opgaven mag je gebruik maken van de standaardintegraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx = \sqrt{\pi} \qquad \text{ongeacht de waarde van } y \in \mathbb{R}\,.$$

($7\frac{1}{2}$) **a.** Laat zien dat bovenstaand beginwaardenprobleem equivalent is met het volgende beginwaardenprobleem in het Fourierdomein en bepaal de oplossing $\widehat{u}(\omega, t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widehat{u}(\omega,t)}{dt} = -\|\omega^2\|\, \widehat{u}(\omega,t) - i\, c \cdot \omega\, \widehat{u}(\omega,t) & \text{voor } (\omega,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \\ \widehat{u}(\omega,0) = \widehat{f}(\omega) & \text{voor } \omega \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(*Hint:* Poneer een oplossing van het type $\widehat{u}(\omega,t) = Ae^{Bt}$ en bepaal de (ω-afhankelijke) parameters A, B.)

($7\frac{1}{2}$) **c.** Laat zien dat voor vaste $t \in \mathbb{R}^+$ de spatiële oplossing gegeven wordt door een convolutieprodukt van de vorm

$$u(x,t) = (\phi_t * f)\,(x)\,,$$

en bepaal het functievoorschrift $\phi_t(x)$ van het spatiële convolutiefilter $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hierin.

(5) **e.** Bewijs: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(x)\, dx = 1.$

(*Hint:* Bekijk $\widehat{\phi_t}(\omega)$.)

EINDE

BIJLAGE BIJ OPGAVE 1

Naam: Studentnummer:

$\circ$	E	I	J	K
E				
I				
J				
K				