TENTAMEN AANSLUITINGSMODULE WISKUNDE VOOR BMT

Vakcode: 8G116. Datum: Dinsdag 30 september 2003. Tijd: 10.45–12.45 uur. Plaats: WH 3A08/WH 3A10.

Lees dit vóórdat je begint!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert. Lever je opgaven persoonlijk bij de surveillanten in. Niet op de tafels laten liggen!
- Het tentamen bestaat uit 20 vragen. De waardering per vraag staat aangegeven in de kantlijn.
- Geef waar mogelijk exacte antwoorden, dus géén numerieke benaderingen.
- Het gebruik van dictaat, aantekeningen of calculator is *niet* toegestaan.

VEEL SUCCES!

(5) **1.** Schrijf uit, d.w.z. werk de haakjes weg: $(2\,a - b + 1)\,(3\,a + 2\,b - 5)$

$(2\,a - b + 1)\,(3\,a + 2\,b - 5) = 6a^2 + ab - 2b^2 - 7a + 7b - 5.$

(5) **2.** Vereenvoudig: $\dfrac{(-2\,c\,d^4)^3}{2\,(3\,c^2\,d)^2}$

$\dfrac{(-2\,c\,d^4)^3}{2\,(3\,c^2\,d)^2} = -\dfrac{4}{9}\dfrac{d^{10}}{c}.$

(5) **3.** Ontbind in factoren: $x^2 - 19\,x + 34$

$x^2 - 19\,x + 34 = (x-2)(x-17).$

(5) **4.** Ontbind in factoren: $-2\,\lambda^3 + 4\,\lambda^2 + 3\,\lambda - 6$

$-2\,\lambda^3 + 4\,\lambda^2 + 3\,\lambda - 6 = -2(\lambda - 2)(\lambda - \frac{1}{2}\sqrt{6})(\lambda + \frac{1}{2}\sqrt{6}).$

(5) **5.** Herleid tot een veelterm plus restbreuk: $\dfrac{2\,x^2 - 4\,x + 3}{x - 1}$

$\dfrac{2\,x^2 - 4\,x + 3}{x - 1} = 2x - 2 + \dfrac{1}{x-1}.$

(5) **6.** Los op: $y^2 - (\sqrt{2} - 1)\,y - \sqrt{2} = 0$

$y^2 - (\sqrt{2} - 1)\,y - \sqrt{2} = (y - \sqrt{2})(y + 1) = 0$ d.e.s.d.a. $y = \sqrt{2}$ of $y = -1$.

(5) **7.** Los op: $\sin^5 x - 2\sin^4 x + 2\sin^3 x = 0$

Stel $y = \sin x$, dan $\sin^5 x - 2\sin^4 x + 2\sin^3 x = y^5 - 2y^4 + 2y^3 = y^3(y^2 - 2y + 2) = 0$ d.e.s.d.a. $y = 0$, aangezien de tweedegraads factor een negatieve discriminant heeft. M.a.w. $\sin x = 0$, d.e.s.d.a. $x = k\pi$ voor willekeurige $k \in \mathbb{Z}$.

(5) **8.** Los op: $\tan x = \sin x$

$\tan x = \sin x$ is goed gedefinieerd als $\cos x \neq 0$, dus als $x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ voor een of andere $k \in \mathbb{Z}$. In dat geval is de vergelijking equivalent met $\sin x = 0$ of $\cos x = 1$, d.e.s.d.a. $x = k\pi$ voor willekeurige $k \in \mathbb{Z}$.

(5) **9.** Los op: $\dfrac{3^{x^2}}{3^x} = \dfrac{1}{3}\, 3^x$

Beide leden van de vergelijking zijn te schrijven als machten van 3, nl. $3^{x^2-x} = 3^{x-1}$. Dit is equivalent met $x^2 - x = x - 1$, oftewel $(x-1)^2 = 0$, d.e.s.d.a. $x = 1$. (De vergelijking is voor alle $x \in \mathbb{R}$ gedefinieerd.)

(5) **10.** Los op: $\log x + \log(x-1) = \log(1-x)$

Het argument van de log-functie moet altijd positief zijn, dus $x > 0$, $x - 1 > 0$ en $1 - x > 0$. Maar dit zijn tegenstrijdige eisen, dus $x \in \emptyset$ (d.w.z. er is geen oplossing).

(5) **11.** Differentieer: $\sqrt{x}$

$\left[\sqrt{x}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

(5) **12.** Differentieer: $\sin\left(\dfrac{1}{2}x + \pi\right)$

$\left[\sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)\right]' = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$.

(5) **13.** Differentieer: ${}^{10}\log(10x)$

$\left[{}^{10}\log(10x)\right]' = \dfrac{1}{x \ln 10}$ $(x > 0)$.

(5) **14.** Differentieer: $2e^{-x}\, \sin(2x)\, \cos(3x)$

$\left[2e^{-x}\, \sin(2x)\, \cos(3x)\right]' = 2e^{-x}\left(-\sin(2x)\cos(3x) + 2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)\right)$.

(5) **15.** Differentieer: $\tanh x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\left[\tanh x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right]' = \left[\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right]' = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$. Hierin is gebruik gemaakt van de definities $\sinh x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ en $\cosh x \overset{\text{def}}{=} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ en het eenvoudig te verifiëren feit dat $\sinh' x = \cosh x$ en $\cosh' x = \sinh x$ (en natuurlijk de quotiëntregel).

(5) **16.** Primitiveer: $\sin\left(3(x + \dfrac{\pi}{4})\right)$

$\displaystyle\int \sin\left(3(x + \frac{\pi}{4})\right)\, dx = -\frac{1}{3}\cos\left(3(x + \frac{\pi}{4})\right) + c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante.

(5) **17.** Primitiveer: 2^x

$\int 2^x \, dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante.

(5) **18.** Primitiveer: $x \ln|x|$

$\int x \ln|x| \, dx = \dfrac{1}{2}x^2 \ln|x| - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int x \, dx = \dfrac{1}{2}x^2\left(\ln|x| - \dfrac{1}{2}\right) + c$. Hierin is $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante. De eerste gelijkheid volgt d.m.v. partiële integratie.

(5) **19.** Los op: $f'' = c \quad$ (met $c \in \mathbb{R}$ een constante)

$f'' = c$ d.e.s.d.a. $f(x) = \frac{1}{2}cx^2 + Ax + B$, voor zekere constanten $A, B \in \mathbb{R}$.

(5) **20.** Los op: $f'' + \omega^2 f = 0 \quad$ (met $\omega > 0$ een constante)

$f'' + \omega^2 f = 0$ d.e.s.d.a. $f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, voor zekere constanten $A, B \in \mathbb{R}$. (Dit is overigens equivalent met $f(x) = A_1 \sin(\omega x + \phi_1)$ evenals met $f(x) = A_2 \cos(\omega x + \phi_2)$ voor geschikt gekozen constanten $A_1, \phi_1, A_2, \phi_2 \in \mathbb{R}$.)

EINDE