Aansluitingsmodule Wiskunde voor BMT

vakcode: 8G116

Dr L.M.J. Florack

laatste wijziging: 24 september 2003

Inhoudsopgave

Deel I

Opgaven

Woord vooraf

Deze “Aansluitingsmodule Wiskunde voor BMT” heeft tot doel de wiskundekennis van het VWO op te frissen. De module is primair bedoeld voor zelfstudie en bestaat merendeels uit oefenopgaven voor het kweken van routinevaardigheid. De opgaven worden voorafgegaan door een zeer beknopte theoretische toelichting.

Naast het routinematig kunnen oplossen van “sommetjes” is inzicht in de toepasbaarheid van de theorie noodzakelijk. Aan het eind van deze module is dan ook een hoofdstuk opgenomen met enkele eenvoudige probleempjes uit de dagelijkse praktijk.

Attentie! Correcties en wijzigingen aangebracht na 22 augustus 2003 zijn aangegeven in rood.

Luc Florack

Eindhoven, 24 september 2003

Notatie

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: De verzameling van natuurlijke getallen.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: De verzameling van gehele getallen.
- $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$: De verzameling van rationele getallen.
- $\mathbb{R}$: De verzameling van reële getallen.
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$: De verzameling van complexe getallen*: $i^2 = -1$.

Hierop zijn voor de hand liggende modificaties mogelijk. De notatie spreekt meestal voor zich. Enkele voorbeelden:

- $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}_0$.
- $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$, enz.

*Complexe getallen komen in deze module niet aan de orde.

Hoofdstuk 1

Elementaire algebraïsche vaardigheden

☞ **Theorie**

Een *algebraïsche uitdrukking zonder haakjes* is opgebouwd uit *termen*. Elke term bestaat uit één of meer *factoren* en elke factor uit *machten* van een grondtal. Door met *haakjes* te werken kun je willekeurige algebraïsche uitdrukkingen maken. Met *haakjes wegwerken* bedoelen we het herschrijven van een willekeurige algebraïsche uitdrukking tot een algebraïsche uitdrukking zonder haakjes. Omgekeerd kun je door gebruik te maken van haakjes een algebraïsche uitdrukking herschrijven tot een minimaal aantal termen. Het bijzondere geval waarbij we een algebraïsche uitdrukking reduceren tot één enkele term noemen we *ontbinden in factoren*.

Termen kun je combineren tot een *som* (of *verschil*) middels *optellen* (of *aftrekken*). Factoren kun je combineren tot een *produkt* (of *quotiënt*) middels *vermenigvuldigen* (of *delen*). Zonder haakjes gaan produkten of quotiënten altijd vóór sommen of verschillen. Als er binnen een factor sprake is van *machtsverheffen* heeft dit weer prioriteit boven vermenigvuldigen en delen. Met haakjes kun je prioriteiten naar believen wijzigen.

❦

Voorbeeld. De algebraïsche uitdrukking $2a^2b+4ac^3$ bestaat uit twee termen, $2a^2b$ en $4ac^3$. De eerste bestaat uit drie factoren, 2, a^2 en b, waarvan de middelste een (tweede) macht van a is. De tweede term bestaat eveneens uit drie factoren 4, a en c^3, waarvan de laatste een (derde) macht van c is. Je kunt de uitdrukking echter ook herschrijven tot een enkelvoudige term, nl. $2a(ab+2c^3)$. Deze bestaat uit één term, bestaande uit drie factoren, 2, a en $ab+2c^3$, waarbij de laatste op zijn beurt is opgebouwd uit twee termen, ab en $2c^3$. Deze zijn weer opgebouwd uit de factoren a en b, respectievelijk 2 en c^3, waarbij de laatste tenslotte een (derde) macht van c is. De haakjes in $2a(ab+2c^3)$ zijn nodig, omdat we geacht worden éérst de som van ab en $2c^3$ te bepalen alvorens we het resultaat daarvan vermenigvuldigen met $2a$. Zonder de haakjes zouden de regels ons dicteren om eerst $2a$ met ab te vermenigvuldigen en bij het resultaat hiervan $2c^3$ op te tellen, hetgeen leidt tot $2a^2b+2c^3 \neq 2a^2b+4ac^3$.

Voorbeeld. Werk de haakjes weg in $a(b^2 - (1-b)^2)$.

Oplossing. Van binnen naar buiten werkend krijgen we $a(b^2 - (1-b)^2) = a(b^2 - (1 - 2b + b^2)) = a(b^2 - 1 + 2b - b^2) = a(-1 + 2b) = -a + 2ab$.

Voorbeeld. Ontbind in factoren: $-a + 2ab$.

Oplossing. Er zijn twee termen. Deze hebben een factor a gemeenschappelijk, dus $-a+2ab = a(-1+2b)$. Uiteraard kun je ook schrijven $-a + 2ab = -a(1-2b)$.

Opmerking. Af en toe kom je wel eens meerletterige symbolen tegen die als één grootheid opgevat moeten worden. Een voorbeeld hiervan zijn bepaalde fysische eenheden. Zo dien je bijvoorbeeld de k en de g in kg (in de betekenis van "kilogram") niet als afzonderlijke factoren op te vatten en dus ook kg^2 niet* als $\text{k}^2\,\text{g}^2$. Ander voorbeeld: SNR staat voor één enkele grootheid, nl. "signal-to-noise-ratio".

✍

Oefeningen

1.

Schrijf uit, d.w.z. werk de haakjes weg.

a. $(3\,a - b)^2$

b. $(-2\,a^2 + 3a)^2$

c. $(3\sqrt{6} - 6\sqrt{3})^2$

d. $(m - 2\,n)\,(3\,m + n)$

e. $(6 - 2\sqrt{3})\,(\sqrt{3} + 2)$

f. $(-3\,a^2\,b^3 + \frac{1}{3}\,a^4\,b)^2$

g. $(-2\,a\sqrt{3} + \sqrt{21})\,(2\,a\sqrt{3} + \sqrt{21})$

h. $(2\,a - b + 1)\,(3\,a + 2\,b - 5)$

i. $\left(\frac{2}{\sqrt{20}} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2$

j. $(3\,a - 1)\,(3\,a + 1)\,(9\,a^2 + 1)$

☞

Theorie

Voor machten gelden de volgende regels (zie Hoofdstuk 3 voor meer details). We nemen voor het gemak aan dat de grondtallen a en b positief zijn (dat is vaak, maar niet altijd noodzakelijk). Verder zijn $p, q \in \mathbb{R}$ willekeurig.

$$\begin{aligned} a^p\,a^q &= a^{p+q} \\ \frac{a^p}{a^q} &= a^{p-q} \\ (a^p)^q &= a^{p\,q} \\ (ab)^p &= a^p\,b^p \end{aligned}$$

*Als je k identificeert met een factor 1000 dan klopt deze factorisatie overigens wèl...

Bij zogenaamde "gebroken machten" wordt vaak het wortel-teken gebruikt:

$$\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}} \quad \text{met als "default"} \quad \sqrt{a} = \sqrt[2]{a}\,.$$

Met het gegeneraliseerde wortel-teken kunnen we o.a. rationele machten schrijven als wortels van gehele machten.

❦

Voorbeeld. Vereenvoudig de volgende algebraïsche uitdrukking:

$$\frac{\sqrt[6]{27\,b^5}}{\sqrt{3}\,a^3\,\sqrt[3]{a}}\,.$$

Oplossing. Teller: $\sqrt[6]{27\,b^5} = \left(27\,b^5\right)^{\frac{1}{6}} = 27^{\frac{1}{6}}\,b^{\frac{5}{6}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}}\,b^{\frac{5}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{5}{6}}$. Noemer: $\sqrt{3}\,a^3\,\sqrt[3]{a} = 3^{\frac{1}{2}}\,a^3\,a^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{10}{3}}$. Daarmee wordt de breuk:

$$\frac{\sqrt[6]{27\,b^5}}{\sqrt{3}\,a^3\,\sqrt[3]{a}} = \frac{b^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{10}{3}}} = a^{-\frac{10}{3}}\,b^{\frac{5}{6}} = \left(a^{-4}\,b\right)^{\frac{5}{6}}\,.$$

☞

Theorie

Welke van de laatste uitdrukkingen uit het voorbeeld je verkiest is een kwestie van smaak. De vraag is dus: Wat is "vereenvoudigen"? Ofschoon er geen ondubbelzinnig resultaat bestaat zullen we hier de volgende regels aanhouden:

- Een vereenvoudigde term bevat slechts één expliciete constante factor (in het voorbeeld: 1 i.p.v. de $\sqrt[6]{27}$ in de teller en $\sqrt{3}$ in de noemer; zo'n factor 1 laten we uiteraard achterwege).
- Iedere ongespecificeerde variabele in een vereenvoudigde term komt slechts éénmaal voor (in het voorbeeld: a en b).
- Indien er meer dan één term is geven we de voorkeur aan het gebruik van haakjes om het aantal termen te minimaliseren. Een bijzonder geval hiervan is ontbinding in factoren.

N.B. In computerprogramma's reduceert men algebraïsche uitdrukkingen vaak tot uitdrukkingen met een minimaal aantal rekenkundige bewerkingen en/of kortste CPU-rekentijd. Dit komt niet per se overeen met de meest esthetische vereenvoudiging.

❦

✍

Oefeningen

2.

Laat zien dat je de algebraïsche uitdrukking uit het laatste voorbeeld ook kunt schrijven als

$$\frac{\sqrt[6]{27\,b^5}}{\sqrt{3}\,a^3\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{\left(\frac{b}{a^4}\right)^5}\,.$$

3.

In onderstaande opgaven wordt telkens gevraagd de uitdrukkingen te vereenvoudigen volgens de voorwaarden hierboven. Voor het gemak veronderstellen we dat de variabelen zó gekozen zijn dat alle uitdrukkingen goed gedefinieerd zijn.

a. $(p^4\,q^2)^3\,(p^2\,q^5)^2$

b. $\dfrac{(-a^5\,b^2)^4}{(a^3\,b)^3}$

c. $\dfrac{(-2\,c\,d^4)^3}{2\,(3\,c^2\,d)^2}$

d. $(-3\,a\,\sqrt{b})^3$

e. $2\,\sqrt{2\,a\,b^2}\,\sqrt{a}$

f. $\dfrac{2p^3\sqrt[3]{q^2}}{\sqrt[4]{4\,p^3\,q}}$

g. $-3\,a^{-7}\,b^{-2}\,(a^2\,b^{-3})^2$

h. $(3\,a^2\,b)^{-\frac{1}{4}}\,(6\,a^3\,b^2)^{\frac{1}{2}}$

i. $\dfrac{3\,a^{-\frac{2}{3}}\,b^2}{2\,a^2\,b^{-\frac{1}{3}}}$

j. $\dfrac{(2\,a)^{-\frac{1}{4}}}{2\,a^{-\frac{1}{2}}}$

4.

Idem.

a. $(p^3\,q^4)^2\,(p^3\,q^2)^4$

b. $\dfrac{(-a^3\,b^2)^4}{(-a^4\,b)^3}$

c. $\dfrac{(-2\,c^2\,d^4)^4}{-2\,(3\,c^2\,d)^3}$

d. $(-2\,a\,b\,\sqrt{b})^5$

e. $3\,\sqrt{2\,a\,b^3}\,\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

f. $\dfrac{(2\,a)^{-\frac{1}{3}}}{2\,a^{-\frac{1}{2}}}$

g. $\dfrac{3\,a^{-\frac{2}{5}}\,b^2}{2\,a^3\,b^{-\frac{1}{2}}}$

h. $(3\,a^2\,b)^{-\frac{1}{3}}\,(6\,a^3\,b^2)^{\frac{1}{4}}$

i. $-3\,(a^{-2}\,b^3)^2\,(a^3\,b^{-2})^{\frac{1}{4}}$

j. $\dfrac{2\,p^3\,\sqrt{q^4}}{\sqrt{p^3\,q}}$

Theorie

Bij ontbinden in factoren let je allereerst op factoren die alle termen gemeenschappelijk hebben. Veelvoorkomende vereenvoudigingen zijn voorts: $a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 = (a \pm b)^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)$ en $a^2 + (b+c)\,a + b\,c = (a+b)\,(a+c)$. Deze gevallen staan bekend als *merkwaardige produkten.*

❦

Voorbeeld. Ontbind in factoren: $4\,x^2 - 28\,x + 49$.

Oplossing. Deze uitdrukking is van de vorm $a^2 - 2\,a\,b + b^2$, nl. door (zeg) $a = 2\,x$ te kiezen en $b = 7$, zodat $a^2 = 4\,x^2$, $-2\,a\,b = -28\,x$ en $b^2 = 49$. Derhalve mogen we herschrijven $4\,x^2 - 28\,x + 49 = a^2 - 2\,a\,b + b^2 = (a-b)^2 = (2x-7)^2$. Je had natuurlijk ook a en b kunnen omwisselen in dit argument. Als alternatief kun je ook opmerken dat de uitdrukking dezelfde gedaante heeft als $a^2 + (b+c)\,a + b\,c$ indien we de volgende identificaties maken: $a = 2\,x$, $b + c = -14$, $b\,c = 49$. Het is niet moeilijk in te zien dat aan de laatste twee regels voldaan is als $b = c = -7$. Conclusie: $4\,x^2 - 28\,x + 49 = a^2 + (b+c)\,a + b\,c = (a+b)\,(a+c) = (2\,x + (-7))(2\,x + (-7)) = (2x-7)^2$. Ga zelf na dat je hier ook had kunnen kiezen: $a = -7$, $b = c = 2\,x$.

Voorbeeld. Ontbind in factoren: $x^3 + 5\,x^2 - 14\,x$.

Oplossing. We hebben allereerst $x^3 + 5\,x^2 - 14\,x = x\,(x^2 + 5\,x - 14)$. In de factor tussen haakjes ontdek je een kwadratische vorm waarop de laatste regel ($a^2 + (b+c)\,a + b\,c = (a+b)\,(a+c)$) toepasbaar is indien we a met x vereenzelvigen en veronderstellen dat $b + c = 5$ en $b\,c = -14$. Het is eenvoudig in te zien dat hieraan voldaan is als we $b = -2$ en $c = 7$ kiezen (of andersom), zodat we tenslotte vinden dat $x^3 + 5\,x^2 - 14\,x = x\,(x^2 + 5\,x - 14) = x\,(x+7)\,(x-2)$.

Oefeningen

5.

Ontbind in factoren.

a. $16\,x^4 - 81$

b. $3\,x^5 - 12\,x^4 - 63\,x^3$

c. $x^{16} - 1$

d. $x^4 + x^2 - 6$

e. $x^2 - 19\,x + 34$

f. $x^2 - 15\,x - 34$

g. $x\,(x-1) - (x-1)$

h. $x\,(x^2-1) + (x-1)$

i. $(3\,x-2)^2 - (2\,x+3)^2$

j. $x^2 - 2\,x\,\sqrt{2} + 2$

6.

Idem.

a. $81\,t^4 - 81$

b. $3\,a^4 - 15\,a^3 + 12\,a^2$

c. $p^{12} - 16$

d. $c^4 - c^2 - 20$

e. $\rho^2 - 21\,\rho + 38$

f. $u^2 - 17\,u - 38$

g. $2\,y\,(y+1) + 2\,(y+1)$

h. $q\,(q^2-1) - (q-1)$

i. $(5\,\alpha - 3)^2 - (3\,\alpha + 5)^2$

j. $z^2 - 2\,z\,\sqrt{3} + 3$

7.

Idem.

a. $3\,x^2 - 20\,x + 12$

b. $2\,v^2 + 7\,v + 6$

c. $3\,y^4 - 11\,y^2 + 6$

d. $-2\,a^2 + 7\,a + 15$

e. $m^2\,\sqrt{2} - m - 3\,\sqrt{2}$

f. $p^2 - 11\,p - 26$

g. $\phi^2 - 3\,\phi - 28$

h. $16\,\xi^4 + 4\,\xi^2 - 2$

i. $2\,k^2 - 6$

j. $-s^3 - 12\,s^2 + 13\,s$

☞ **Theorie**

Soms kun je veeltermen van graad drie of hoger ontbinden in factoren met dezelfde trucjes die op tweedegraads veeltermen van toepassing zijn. Veeltermen van hogere graad kunnen nl. "verkapte" tweedegraads veeltermen zijn, of er kan een eenvoudig te bepalen factor afgesplitst worden.

❦

Voorbeeld. De vierdegraads veelterm $x^4 + x^2 - 6$ uit een voorgaande opgave is feitelijk een tweedegraads veelterm als we x^2 vervangen door, zeg, t. In de vierdegraads veelterm $3\,a^4 - 15\,a^3 + 12\,a^2$ kun je een gemeenschappelijke factor a^2 afsplitsen, waarna er wederom een tweedegraads veeltermfactor overblijft. Soms moet je iets creatiever zijn om een gemeenschappelijke factor te ontdekken. Voorbeeld: $x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6$. Als je $x = 1$ invult komt er nul uit, dus kun je een factor $x - 1$ afsplitsen: $x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6 = (x-1)\,q(x)$ voor één of andere tweedegraads veelterm $q(x)$. Om $q(x)$ te vinden kun je een "staartdeling" maken: $x - 1/x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6\backslash x^2 - x - 6$ (zie Figuur 1.1).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x-1 & / & x^3 & -2\,x^2 & -5\,x & +6 & & \backslash & x^2-x-6 \\
 & & x^3 & -x^2 & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & \overline{} & \vdots & \vdots & & & \\
 & & & -x^2 & -5\,x & \vdots & & & \\
 & & & -x^2 & +x & \vdots & & & \\
 & & & & \overline{-6\,x} & +6 & & & \\
 & & & & -6\,x & +6 & & & \\
 & & & & & \overline{0} & \text{(rest)} & &
\end{array}
$$

Figuur 1.1: Staartdeling. Omdat $x = 1$ een nulpunt is van $x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6$ eindigt deze staartdeling in “rest 0”. Uit deze staartdeling blijkt dat $x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6 = (x-1)\,(x^2 - x - 6)$. Overigens kun je de laatste factor hierin nog verder ontbinden (hoe?).

✍ **Oefeningen**

8.

Maak een staartdeling om de breuk

$$\frac{3\,x^2 - 20\,x + 12}{x - 6}$$

te vereenvoudigen en vergelijk je antwoord met onderdeel **a** uit de vorige opgave.

9.

Ontbind in factoren. Zoek daartoe eerst naar eenvoudige nulpunten, zoals $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Maak gebruik van staartdelingen en de regels die je kent voor tweedegraads veeltermen.

a. $x^3 - 4\,x^2 - x + 4$

b. $a^3 + 5\,a^2 - 4\,a - 20$

c. $p^3 - p^2\sqrt{3} + p\sqrt{3} - 1$

d. $3\,\gamma^3 - 12\,\gamma^2 + 2\,\gamma - 8$

e. $-2\,\lambda^3 + 4\,\lambda^2 + 3\,\lambda - 6$

f. $2\,t^3 - 6\,t^2 + t - 3$

g. $-3\,y^3 + 6\,y^2 + 2\,y - 4$

h. $r^3 - 8\,r^2 - r + 8$

i. $3\,u^3 + 15\,u^2 - 4\,u - 20$

j. $z^3 - z^2\sqrt{2} + z\sqrt{2} - 1$

10.

Staartdelingen zijn ook handig om breuken waarin teller en noemer veeltermen zijn te vereenvoudigen. Toon middels een staartdeling aan dat

$$\frac{x^3 + 2\,x^2 + 5\,x + 1}{x^2 + x + 1} = x + 1 + \frac{3\,x}{x^2 + x + 1}\,.$$

(*Hint:* Je staartdeling eindigt met de restterm $3\,x$ i.p.v. 0.)

11.

Maak naar analogie van de vorige opgave staartdelingen om de volgende breuken te herleiden tot veeltermen "plus restbreuk". Met restbreuk bedoelen we een term in de vorm van een breuk waarin de veelterm in de noemer een hogere graad heeft dan die in de teller.

a. $\dfrac{2\,x^2 - 4\,x + 3}{x - 1}$

b. $\dfrac{2\,x^2 + 3\,x - 1}{x + 1}$

c. $\dfrac{2\,x^3 + 3\,x^2 - 2\,x - 2}{x + 1}$

d. $\dfrac{2\,x^4 + x^2}{x^2 + 1}$

e. $\dfrac{x^3 + 2}{x^3 + 1}$

12.

Bewijs met behulp van een staartdeling dat, als $a \in \mathbb{R}$ een constante is,

$$\frac{x^2 - 2\,x - 35}{x - a} = x + a - 2 + \frac{a\,(a - 2) - 35}{x - a}\,.$$

Wat is de significantie van de parameterkeuzen $a = -5$ en $a = 7$?

☞ **Theorie**

Veeltermvergelijkingen zijn het eenvoudigst op te lossen indien je de veelterm kunt ontbinden in factoren. Voor tweedegraads veeltermvergelijkingen hebben we de welbekende *ABC-formule*:

$$A\,x^2 + B\,x + C = 0 \quad \text{met } A \neq 0 \quad \text{d.e.s.d.a.} \quad x = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A} \quad \text{of} \quad x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A}\,.$$

De voorwaarde voor het bestaan van reële oplossingen is $B^2 - 4\,A\,C \geq 0$. Bij gelijkheid vallen de twee oplossingen samen. De uitdrukking $B^2 - 4\,A\,C$ heet ook wel de *discriminant*.

❦

Voorbeeld. Los op: $x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6 = 0$.

Oplossing. Ontbinden in factoren (merk op dat $x = 1$ voldoet) leidt tot $(x-1)\,(x+2)\,(x-3) = 0$. Conclusie: $x = 1$ of $x = -2$ of $x = 3$.

Voorbeeld. Los op: $\pi^2\,\theta^2 + 2\pi\,\theta + \frac{3}{4} = 0$.

Oplossing. De ABC-formule geeft ons $A = \pi^2$, $B = 2\,\pi$, $C = \frac{3}{4}$, dus $B^2 - 4\,A\,C = \pi^2 > 0$. Er zijn dus twee reële oplossingen, en wel

$$\theta = \frac{-2\pi \pm \pi}{2\,\pi^2} \quad \text{m.a.w.} \quad \theta = -\frac{3}{2\pi} \quad \text{of} \quad \theta = -\frac{1}{2\pi}\,.$$

Voorbeeld. Los op: $x^2 + 2\,x + 10 = 0$.

Oplossing. Met $A = 1$, $B = 2$ en $C = 10$ vinden we de discriminant $B^2 - 4\,A\,C = -36 < 0$. Er bestaan dus geen reële oplossingen.

✍ **Oefeningen**

13.

Los op.

a. $x^2 - x - 42 = 0$

b. $t^2 - 2 = 0$

c. $y^2 - (\sqrt{2} - 1)\,y - \sqrt{2} = 0$

d. $3\,p^2 + 4\,p + 1 = 0$

e. $2\,a^2 - 5\,a + 2 = 0$

f. $u^3 - u^2\,\sqrt{3} - u + \sqrt{3} = 0$

g. $q^2 - 2\,q + 17 = 0$

h. $3\,r^3 + r^2 - 3\,r - 1 = 0$

i. $s^5 - 2\,s^4 + 2\,s^3 = 0$

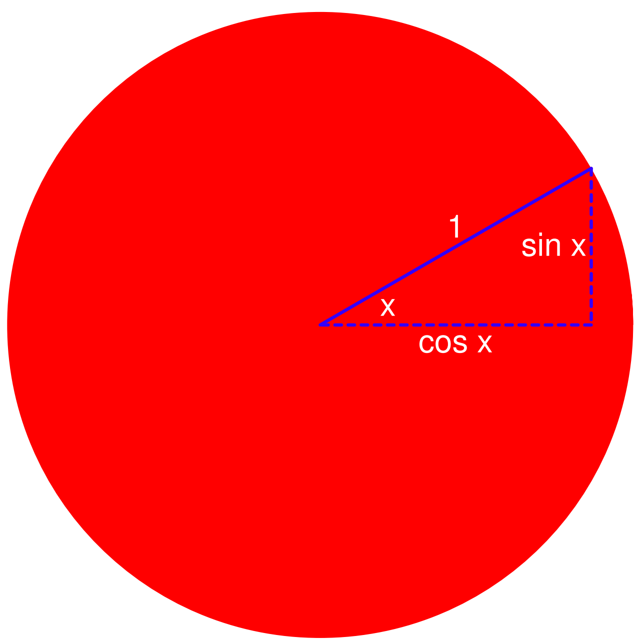
j. $z + \sqrt{z} - 2 = 0$

Hoofdstuk 2

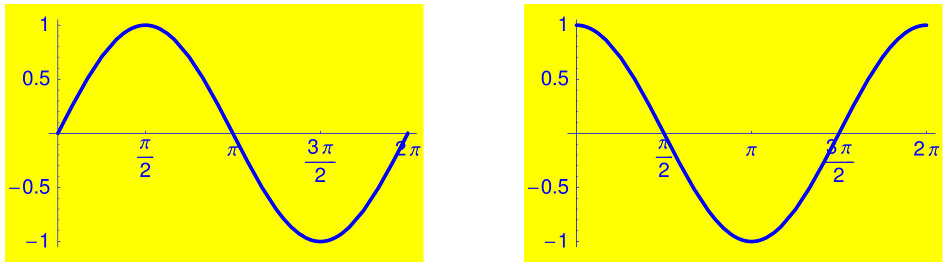
Goniometrie

☞ **Theorie**

De functies sinus en cosinus worden gezamenlijk aangeduid als *sinusoïden*: Zie Figuur 2.1 en Figuur 2.2.



Figuur 2.1: Meetkundige voorstelling van sinus en cosinus m.b.v. de eenheidscirkel.



Figuur 2.2: Grafieken van sinus en cosinus.

Goniometrische identiteiten:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta \\
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\
\tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\alpha \neq (k+\frac{1}{2})\pi\,, k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Graden versus radialen:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{(rad)} \qquad \text{(bij benadering: } 1^\circ \approx 0.0174533\text{)}$$

De toevoeging "rad" ("radialen") wordt doorgaans weggelaten. Het symbool $^\circ$ mag je echter nóóit weglaten. Gebruik voortaan radialen.

Voorbeeld. Reken om naar radialen, respectievelijk graden: $\alpha = 15^\circ$ resp. $\beta = \frac{2\pi}{3}$ rad.

Oplossing.

$$\alpha = 15^\circ = 15\,\frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{\pi}{12}\ \text{rad} \qquad \text{resp.} \qquad \beta = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad} = \frac{2\pi}{3}\,\frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ\,.$$

Tabel 2.1 geeft enkele bijzondere gevallen aan die je uit je hoofd moet kunnen reproduceren.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	bestaat niet

Tabel 2.1: Enkele bijzondere gevallen. De hoeken zijn gegeven in radialen.

Periodiciteiten: Voor willekeurige $k \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\sin(\alpha + k\,2\pi) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + k\,2\pi) = \cos\alpha \qquad \tan(\alpha + k\,\pi) = \tan\alpha\,.$$

Goniometrische vergelijkingen: Voor willekeurige $k \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\begin{array}{rlll}
\sin\alpha = \sin\beta & \text{d.e.s.d.a.} & \alpha = \beta + k\,2\pi \quad \text{of} & \alpha = \pi - \beta + k\,2\pi \\
\cos\alpha = \cos\beta & \text{d.e.s.d.a.} & \alpha = \beta + k\,2\pi \quad \text{of} & \alpha = -\beta + k\,2\pi \\
\tan\alpha = \tan\beta & \text{d.e.s.d.a.} & \alpha = \beta + k\,\pi &
\end{array}$$

D.w.z. er zijn op de eenheidscirkel bijna altijd twee verschillende punten (d.w.z. hoeken in het half-open interval $[0, 2\pi)$) aan te wijzen met dezelfde sinus, cosinus of tangens.

❦

✍ Oefeningen

14.

Voeg na de eerste kolom in Tabel 2.1 een extra kolom in met hoeken uitgedrukt in graden.

15.

Wat wordt er in de theorie over "goniometrische vergelijkingen" bedoeld met "bijna altijd"? Bespreek de uitzonderingen voor het geval van sinus, cosinus en tangens apart.

16.

Bepaal de exacte oplossing(en) van de volgende vergelijkingen (met $\sin^2 x$ bedoelen we $(\sin x)^2$, enzovoort).

a. $\sin x = \frac{1}{2}$

b. $\cos 7x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c. $\sin(2x - 1) = -1$

d. $\cos(\pi(x + \frac{1}{2})) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

e. $\tan x = -\sqrt{3}$

f. $\sin^5 x - 2\sin^4 x + 2\sin^3 x = 0$

g. $\cos^2 x - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})\,\cos x + \frac{1}{4}\sqrt{3} = 0$

h. $\sin^2 x^7 + 2\sin x^7 - 35 = 0$

i. $\tan^2(2x + 1) - (1 + \sqrt{3})\tan(2x + 1) + \sqrt{3} = 0$

j. $\tan x = \sin x$

17.

Leid zelf de volgende goniometrische identiteiten af uit bovenstaande theorie of met behulp van de eenheidscirkel. Vermeld ook de voorwaarden waaraan de argumenten moeten voldoen.

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\
\tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\,\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 \\
\cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\,\tan\beta} \\
\frac{1}{\cos^2\alpha} &= 1 + \tan^2\alpha
\end{aligned}$$

18.

Idem.

$$\begin{aligned}
\sin(\pi \pm \alpha) &= \mp\sin\alpha \\
\cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos\alpha \\
\tan(\pi \pm \alpha) &= \pm\tan\alpha
\end{aligned}$$

19.

Idem.

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) &= \cos\alpha \\
\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) &= \sin\alpha \\
\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) &= \frac{1}{\tan\alpha}
\end{aligned}$$

Hoofdstuk 3

Exponentiële en logaritmische functies

☞ **Theorie**

De *exponentiële* en *logaritmische functies* voldoen aan de volgende rekenregels $(a, x, y > 0)$:

$$\begin{aligned}
a^x\, a^y &= a^{x+y} \\
\frac{a^x}{a^y} &= a^{x-y} \\
(a^x)^y &= a^{x\,y} \\
{}^a\!\log(x\,y) &= {}^a\!\log x + {}^a\!\log y \\
{}^a\!\log(\frac{x}{y}) &= {}^a\!\log x - {}^a\!\log y \\
{}^a\!\log x^y &= y\,{}^a\!\log x \\
a^{{}^a\!\log x} &= x \\
{}^a\!\log(a^x) &= x
\end{aligned}$$

Een bijzonder geval is de "e-macht" en de bijbehorende "natuurlijke logaritme", $\ln = {}^e\!\log$, met $e \approx 2.71828182845904523536028747135\ldots$ "Omrekenregels" voor grondtallen $(a, b, x, y > 0)$:

$$\begin{aligned}
a^x &= b^{x\,{}^b\!\log a} \\
{}^a\!\log x &= \frac{{}^b\!\log x}{{}^b\!\log a}
\end{aligned}$$

I.h.b. hebben we dus $a^x = e^{x\,\ln a}$ en ${}^a\!\log x = \frac{\ln x}{\ln a}$ evenals $e^x = a^{x\,{}^a\!\log e}$ en $\ln x = \frac{{}^a\!\log x}{{}^a\!\log e}$.

Vergelijkingen met exponentiële of logaritmische functies:

$$\begin{aligned}
a^x = a^y &\quad \text{d.e.s.d.a.} \quad x = y \\
{}^a\!\log x = {}^a\!\log y &\quad \text{d.e.s.d.a.} \quad x = y
\end{aligned}$$

Restricties: De expontentiële functie $f(x) = a^x$ (met $a > 0$) is goed gedefinieerd voor alle $x \in \mathbb{R}$. De logaritmische functie $g(x) = {}^a\log x$ (met $a > 0$) is goed gedefinieerd voor $x > 0$ en niet gedefinieerd voor $x \leq 0$.

Opmerkingen.

- Controleer altijd het teken van de argumenten van een logaritmische functie!
- I.p.v. e^x schrijft men vaak $\exp x$. Dus $\exp x = e^x$, $\exp(x \ln a) = a^x$, enz.

❦

Oefeningen

20.

Los op. Controleer indien nodig je oplossing(en). Met ${}^a\log^2 x$ bedoelen we $({}^a\log x)^2$, enzovoort.

a. $e^{x^2+1} = e^{2x}$

b. $e^{2x} - 2\,e^x + 1 = 0$

c. $10^{x+1} = 100^{\sqrt{x}}$

d. $2^{x^7-1} = -\dfrac{1}{2}$

e. $2^x = 4^x$

f. $2^{x^2+9} = 64^x$

g. $\dfrac{3^{x^2}}{3^x} = \dfrac{1}{3}\,3^x$

h. $e^{e^{e^x}} = 2$

i. $2^x\,e^x - 2^x - e^x + 1 = 0$ (*hint:* $a = e^x$, $b = 2^x$)

j. $\sqrt{2^{x^2}} = \sqrt{2}^{\,x^2}$

21.

Idem.

a. $\ln x = {}^{10}\log x$

b. $\ln x^{x-2} = 0 \quad (\text{met } x > 0)$

c. $\ln \dfrac{x-1}{x+1} = -1$

d. $\ln \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = -1$

e. $\ln(x-2) = \ln \dfrac{1}{x+2}$

f. $\ln(x^3 - x^2 - x + 1) = 0$

g. $\log x + \log(x-1) = \log(1-x)$

h. $9\,{}^2\log^2 x - 6\,{}^2\log x + 1 = 0$

i. $\log\log x = 1$

j. $\log e^x = \log^2 e\,\ln 10^x$

Hoofdstuk 4

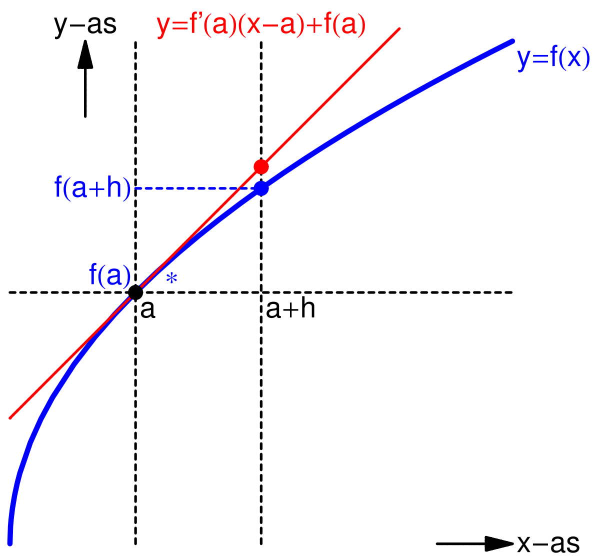
Differentiëren

☞ **Theorie**

Definitie van de *afgeleide van een functie in een punt* $a \in \mathbb{R}$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \,.$$

Deze definitie veronderstelt uiteraard dat de limiet bestaat. Als dat zo is heet f *differentieerbaar in het punt* a. Als f differentieerbaar is in alle punten van haar domein, dan noemen we de functie *differentieerbaar* (zonder meer), met f' als *afgeleide functie*. Zie Figuur 4.1.



Figuur 4.1: Constructie van de afgeleide $f'(a)$.

❦

✍ **Oefeningen**

Er bestaan diverse meetkundige interpretaties van de afgeleide van een functie in een punt. Hieronder staan enkele vermeld. De opdracht is telkens om aannemelijk te maken waarom dit zo is.

22.

a. $f'(a)$ is gelijk aan de *tangens van de locale hellingshoek* van de grafiek van f in $x = a$, in de figuur aangegeven met een $*$.

b. $f'(a)$ kan opgevat worden als de *richtingscoëfficiënt van de raaklijn* aan de grafiek van f in $x = a$. Deze raaklijn is aangegeven in de figuur. De vergelijking van deze raaklijn luidt: $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$.

c. In een voldoende kleine omgeving rond een gegeven punt a kun je een differentieerbare functie benaderen door de functie behorende bij zijn raaklijn, m.a.w. als $x \approx a$, dan $f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x - a)$. Dit wordt ook wel de "eerste orde benadering" van f rond a genoemd. Door wat symbolen te veranderen (hoe?) mag je dit ook schrijven als $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h$. (De toevoeging "eerste orde" duidt op het feit dat je de functie benadert door een eerste orde veelterm.)

d. $f'(a)$ geeft de *instantane groeisnelheid* aan van de functie f in $x = a$.

e. Als $f'(a) < 0$ dan is de grafiek van f *dalend* in $x = a$. Als $f'(a) = 0$ dan heeft de grafiek van f een horizontale raaklijn in $x = a$. Als $f'(a) > 0$ dan is de grafiek van f *stijgend* in $x = a$.

☞ **Theorie**

Hou altijd in de gaten dat f (een *functie*) iets heel anders betekent als $f(x)$ (de waarde die de functie aanneemt als je deze evalueert in x, dus een *getal*). De *grafiek* van een functie is noch een functie noch een getal, maar een *grafisch object*. Binnen de wiskunde is het een doodzonde om deze drie typen met elkaar te verwarren. Binnen BMT (zoals dat een empirische wetenschap betaamt) zullen we zo nu en dan slordig omspringen met terminologie, zoals wanneer we praten over "de functie $f(x)$" i.p.v. "de functie f" of vragen naar "een raaklijn aan f" i.p.v. naar "een raaklijn aan de grafiek van f". Niettemin moet je deze verschillende concepten ten allen tijde uit elkaar kunnen houden en je realiseren wat er *bedoeld* wordt.

❦

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide $f'(x)$ van de functie $f(x) = x^5$. Bereken vervolgens $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(4)$ en $f'(5)$.

Oplossing. Het functievoorschrift $f(x) = x^5$ invullen in de definitie levert

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h}\,.$$

Haakjes wegwerken in de teller levert (ga na!)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^5 + 5hx^4 + 10h^2x^3 + 10h^3x^2 + 5h^4x + h^5 - x^5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5hx^4 + 10h^2x^3 + 10h^3x^2 + 5h^4x + h^5}{h} \,.$$

Merk op dat de h-onafhankelijke termen in de teller wegvallen! Vereenvoudiging van deze breuk door teller en noemer door h te delen geeft tenslotte

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 5x^4 + h\left(10\,x^3 + 10\,h\,x^2 + 5\,h^2\,x + h^3\right) \,.$$

De term met voorfactor h gaat naar nul in de limiet voor iedere waarde van x. Conclusie:

$$f'(x) = 5x^4 \,.$$

Door invullen vind je vervolgens: $f'(0) = 0$, $f'(1) = 5$, $f'(2) = 80$, $f'(3) = 405$, $f'(4) = 1280$ en $f'(5) = 3125$.

Oefeningen

23.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal met behulp van de definitie de bijbehorende afgeleide $f'(x)$. Bestudeer daartoe eerst zorgvuldig het voorbeeld.

a. 1

b. x

c. x^2

d. x^3

e. x^4

24.

Maak a.h.v. een tabel aannemelijk dat

$$\lim_{h\to 0} \sin h = 0 \quad , \quad \lim_{h\to 0} \cos h = 1 \quad , \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{en} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 1$$

door een vijftal kolommen op te nemen, één voor h zelf en één voor $\sin h$, $\cos h$, $\sin h/h$ resp. $(\cos h - 1)/h$. Neem vervolgens een dalende rij waarden voor h, bijvoorbeeld $h = 1, 0.1, 0.01, 0.001\ldots$ (radialen) en vul de rest van de tabel in (hiervoor heb je een rekenmachine nodig). Gebruik de goniometrische identiteiten om de tweede en derde regel in Tabel 4.2 op bladzijde 23 te bewijzen uitgaande van de limietdefinitie op pagina 20.

25.

Maak middels een soortgelijke tabel aannemelijk dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1\,.$$

Neem hiertoe drie kolommen op, één voor de noemer, één voor de teller en één voor de breuk. Bewijs hiermee de vierde regel in Tabel 4.2 uitgaande van de limietdefinitie op pagina 20.

☞ **Theorie**

Tabellen 4.1 en 4.2 geven een overzicht van enkele veel gebruikte functies en hun afgeleiden. Ze kunnen met behulp van de limiet-definitie worden afgeleid (dat zullen we hier, m.u.v. de voorbeelden uit de vorige opgaven, echter niet doen).

$f(x)$	$f'(x)$	voorwaarden
$b\,x^a$	$ab\,x^{a-1}$	$((a \geq 0$ of $a \in \mathbb{Z}),\ b \in \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R})$ of $(a < 0\,,\ b \in \mathbb{R}$ en $x > 0)$
$\sin(\omega x + \alpha)$	$\omega\ \cos(\omega x + \alpha)$	$\omega, \alpha, x \in \mathbb{R}$
$\cos(\omega x + \alpha)$	$-\omega\ \sin(\omega x + \alpha)$	$\omega, \alpha, x \in \mathbb{R}$
$a^{\lambda x}$	$\lambda\, a^{\lambda x}\ \ln a$	$a > 0, \lambda, x \in \mathbb{R}$
${}^a\!\log(\lambda\, x)$	$\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln a}$	$a > 0, \lambda, x \in \mathbb{R}$ met $\lambda x > 0$

Tabel 4.1: Enkele veel gebruikte functies en hun afgeleiden. Deze tabel hoef je *niet* uit je hoofd te kennen.

$f(x)$	$f'(x)$	voorwaarden
x^a	$a\,x^{a-1}$	$((a \geq 0$ of $a \in \mathbb{Z})$ en $x \in \mathbb{R})$ of $(a < 0$ en $x > 0)$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
e^x	e^x	
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$

Tabel 4.2: Bijzondere gevallen van Tabel 4.1. Merk op dat $\ln x = {}^e\!\log x$. Deze tabel moet je altijd paraat hebben.

❦

✍ **Oefeningen**

26.

Neem Tabel 4.2 over en voeg een extra kolom in na de tweede waarin je $f''(x)$ uitzet.

27.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal a.h.v. Tabel 4.1 $f'(x)$ en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele x moet voldoen.

a. x^4

b. $\sqrt{x}$

c. $x^{\frac{1}{2}}$

d. x^{-2}

e. $\sqrt[3]{x}$

f. $\dfrac{1}{x}$

g. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

h. $x^{\frac{5}{2}}$

i. $x\sqrt{x}$

j. $x^{-\sqrt{2}}$

28.

Idem.

a. $\sin(3x)$

b. $\cos(\pi x)$

c. $\sin\left(\dfrac{1}{2}x + \pi\right)$

d. $\cos(2x - 1)$

e. $\sin\left(3(x + \dfrac{\pi}{4})\right)$

f. $\cos\left(\pi(x - \dfrac{1}{3}\sqrt{3})\right)$

g. $\sin\left(10^9 x\right)$

h. $\cos\left(10^{-9} x\right)$

i. $\sin(-x)$

j. $\cos(-x)$

29.

Idem.

a. 2^x

b. $10^{\frac{x}{2}}$

c. ${}^{\frac{1}{2}}\log x$

d. $e^{-x\sqrt{5}}$

e. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

f. $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{10x}$

g. ${}^{10}\log(10x)$

h. $\dfrac{1}{2^x}$

i. $\dfrac{1}{e^{2x}}$

j. $\ln(3x)$

☞ **Theorie**

Voor willekeurige constanten $a, b \in \mathbb{R}$ en willekeurige differentieerbare functies f, g geldt het zogenaamde *superpositie-* of *lineariteitsprincipe*:

$$(a\,f(x) + b\,g(x))' = a\,f'(x) + b\,g'(x)\,.$$

In woorden: "De afgeleide van een som van twee functies is de som van de afgeleiden van die functies. De afgeleide van een *constant* (!) veelvoud van een functie is hetzelfde veelvoud van de afgeleide van die functie".

❦

✍ **Oefeningen**

30.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal $f'(x)$ en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele x moet voldoen.

a. $x^4 + 2x^2 + 1$

b. $(x-1)^2$

c. $x\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$

d. $2\sin x + \cos x$

e. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 6\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

f. $-e^{-x} + \dfrac{x^2}{2}$

g. $\ln(7x)$

h. ${}^{2}\log\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{2}$

i. $10^{\pi x} + \ln\pi\ {}^{\pi}\log(\pi x)$

j. $(2^x + 1)^3$

☞ **Theorie**

Voor twee differentieerbare functies f, g geldt de zogenaamde *produktregel*:

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,.$$

❦

✍ **Oefeningen**

31.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal $f'(x)$ en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele x moet voldoen.

a. $x\,e^x$

b. $e^{-x}\,\sin x$

c. $\dfrac{1-x}{x}$

d. $(\cos x + \sin x)^2$

e. $(e^x+1)^2\,(x+1)^2$

f. $x\,\ln x - x$

g. $(x+1)^2\,\cos(2x-1)$

h. $\dfrac{{}^{10}\log\,(x^2+1)}{x^2}$

i. $2\cos^2 x - 1$

j. $2e^{-x}\,\sin(2x)\,\cos(3x)$

32.

Pas de produktregel toe op de functies f en g voor het bijzondere geval dat $f(x) = c$ constant. Is de regel "consistent met het lineariteitsprincipe"?

33.

Bewijs dat voor drie differentieerbare functies f, g, h geldt:

$$(f(x)\,g(x)\,h(x))' = f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) + f(x)\,g(x)\,h'(x)\,.$$

Kun je nu zonder meer de regel geven voor het geval van vier en meer factoren?

☞ **Theorie**

Voor samengestelde differentieerbare functies hebben we de zogenaamde *kettingregel*:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)\,.$$

❦

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide van de functie $h(x) = e^{-x^2}$ door deze te schrijven als samenstelling van twee functies die in Tabel 4.1 voorkomen en hierop de kettingregel toe te passen.

Oplossing. Het is raadzaam om niet alleen voor de samenstellende functies, maar ook voor hun variabelen verschillende symbolen te gebruiken. Neem bijvoorbeeld $f(y) = e^y$, $g(x) = -x^2$, dan kunnen we $h(x)$ verkrijgen door in het functievoorschrift van f in te vullen $y = g(x)$, dus $h(x) = f(g(x))$. Toepassing van de kettingregel levert nu $f'(y) = e^y$, $g'(x) = -2x$, dus $h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))\, g'(x) = -2x\, e^{-x^2}$.

✍ Oefeningen

34.

Controleer de kettingregel door voor elk van de onderstaande functies $h(x)$ de afgeleide $h'(x)$ op twee verschillende manieren te bepalen, éénmaal gebruik makend van de kettingregel en éénmaal van een alternatieve methode. Geef aan welke de samenstellende functies $f(y)$ en $g(x)$ zijn als je veronderstelt dat $h(x) = f(g(x))$.

a. $e^{\ln x} \quad (x > 0)$

b. $\ln(e^x)$

c. $(2x)^2$

d. $\cos^2 x$

e. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

f. $(x-1)^3$

g. $\sqrt{x^2} \quad (x \neq 0)$

h. $2^{\frac{{}^{10}\log x}{{}^{10}\log 2}} \quad (x > 0)$

i. $\ln x^4 \quad (x > 0)$

j. 2^{-x}

35.

Stel dat $f(x)$ en $g(x)$ elkaars inverse functies zijn, d.w.z. $f(g(x)) = x$ en $g(f(x)) = x$ voor alle toelaatbare x. (Een voorbeeld hiervan heb je in onderdelen **a** en **b** van de vorige opgave gezien.)

a. Wat kun je zeggen over het verband tussen de afgeleiden van deze functies?

b. Stel $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sqrt{x}$ voor $x \in \mathbb{R}^+$. Ga na dat deze functies elkaars inverse zijn en controleer je antwoord bij **a** a.h.v. dit voorbeeld.

36.

Leid Tabel 4.1 af uit Tabel 4.2 met behulp van lineariteit, produktregel en/of kettingregel. Onthou Tabel 4.2.

37.

Definieer $h(x) = \ln \frac{x}{a}$ voor $x > 0$ en met $a > 0$ constant. Bepaal $h'(x)$ op twee verschillende manieren, met resp. zonder gebruik te maken van de kettingregel. Leg uit waarom $h'(x)$ niet van a afhangt.

☞ **Theorie**

Een variant op de produktregel, welke hieruit af te leiden is met behulp van de kettingregel, is de zogenaamde *quotiëntregel*:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \, .$$

Uiteraard moet dan gelden dat $g(x) \neq 0$ voor iedere toelaatbare x. Let op de volgorde van de termen in de teller! Vuistregel: Begin altijd met "NAT(tigheid!): Noemer maal Afgeleide Teller minus etcetera…"

❦

✍ **Oefeningen**

38.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal $f'(x)$ *op twee verschillende manieren*, eenmaal door toepassing van de quotiëntregel en eenmaal op een alternatieve manier. Vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele x moet voldoen.

a. $\dfrac{1}{x}$

b. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

c. $\dfrac{1}{\ln x}$

d. $\dfrac{10^x}{2^x}$

e. $\dfrac{x}{x^2-1}$ (*hint:* schrijf dit als $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$.)

f. $\dfrac{x^2-1}{x+1}$

g. $\dfrac{1}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

h. $x\, e^{-x}$

i. $\dfrac{e^{2x} + 4e^x + 3}{e^x + 3}$

j. $\dfrac{\sin x}{\tan x}$

39.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal $f'(x)$ en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele x moet voldoen.

a. $\dfrac{\ln x}{x}$

b. $\dfrac{\sin x}{x}$

c. $\tan x$

d. $\dfrac{e^x}{1+x^2}$

e. $\dfrac{10^x}{\sqrt{x^2+1}}$

f. $\dfrac{\cos 2x}{2+\cos 3x}$

g. $\dfrac{\tan x}{\tan 2x}$

h. $\dfrac{2}{1-x^2}$

i. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x^2}}$

j. $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

☞

Theorie

In fysische en biomedische toepassingen hanteert men vaak mnemonische *variabelen* zoals x ("horizontale verplaatsing"), t ("tijd"), r ("radiële afstand"), u ("uitwijking"), enz. Het is daarom van groot belang een flexibele houding te ontwikkelen t.a.v. de gebruikte symbolen. Waar in bovenstaande x staat kun je dus in de praktijk evengoed t, r, u, enz. tegenkomen.

Daarnaast kom je in de praktijk vaak zogenaamde *parameters* tegen. Het conceptuele verschil met variabelen is dat parameters doorgaans als *ongespecificeerde constanten* worden beschouwd. In feite zijn we deze al tegengekomen: De constanten a, b, α, λ en ω in Tabel 4.1 zijn alle voorbeelden van parameters. Als we praten over differentiëren bedoelen we impliciet het nemen van de afgeleide met betrekking tot de betreffende variabele, waarbij eventuele parameters als constanten moeten worden opgevat. Daarnaast worden functies in de praktijk vaak met verschillende symbolen aangeduid, al naar gelang hun context.

❦

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide van de functie $x(f) = f^{-1}$.

Oplossing. De functie heet nu, enigszins ongebruikelijk, x (zou voor "positie langs de x-as" kunnen staan), en haar variabele f ("frekwentie" o.i.d.?). Hoe het ook zij, we hebben nu $x'(f) = -f^{-2}$.

Voorbeeld. Bepaal de afgeleide van de functie $u(t) = A \sin(\omega t + \phi)$.

Oplossing. De functie heet nu u (zou voor "uitwijking" kunnen staan). Naast haar variabele t ("tijd") bevat zij een drietal parameters: A ("amplitude"), ω (in de praktijk vaak gebruikt in de betekenis van "frequentie") en ϕ (vaak duidend op een "hoek"). Zoals de notatie suggereert moeten we diffferentiëren naar t en moeten we A, ω en ϕ als constanten opvatten. We vinden zodoende met behulp van Tabel 4.1, het lineariteitsprincipe en de kettingregel (ga na):

$$u'(t) = A\,\omega\,\cos(\omega t + \phi)\,.$$

✍

Oefeningen

40.

In onderstaande onderdelen is telkens een functievoorschrift in één variabele gegeven. Bepaal de bijbehorende afgeleide en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele moet voldoen.

a. $(t+1)^2$

b. $r^{\frac{1}{2}}$

c. $\dfrac{1}{u}$

d. $\sin(\dfrac{1}{2}t + \pi)$

e. $\dfrac{1}{2^r}$

f. $\sin(3(\phi + \dfrac{\pi}{4}))$

g. $a\,e^a$

h. $2\cos^2\alpha - 1$

i. $2\,e^{-y}\,\sin(2y)\,\cos(3y)$

j. $R\ln R - R$

41.

In onderstaande onderdelen is telkens een functievoorschrift in één variabele en één of meer parameters gegeven. Bepaal de bijbehorende afgeleide (m.b.t. de variabele dus) en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele en de parameter(s) moeten voldoen.

a. $u(t) = (\dfrac{t}{a} + 1)^2$

b. $f(r) = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$

c. $g(u) = \dfrac{1}{u^p}$

d. $z(t) = \sin(\dfrac{2\pi t}{T} + \phi)$

e. $V(r) = \dfrac{V_0}{2^{\frac{r}{\rho}}}$

f. $u(\phi) = A\sin(3(\phi + \dfrac{\pi}{4}))$

g. $x(a) = a\,e^{c\,a}$

h. $y(\alpha) = 2\cos^2\alpha - k$

i. $h(y) = 2C\,e^{-\lambda\,y}\,\sin(2\omega y)\,\cos(3\omega y)$

j. $S(R) = \dfrac{R}{R_0}\ln\dfrac{R}{R_0} - \dfrac{R}{R_0}$

42.

De functies *sinus hyperbolicus* en *cosinus hyperbolicus* zijn als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,\\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.\end{aligned}$$

a. Toon aan dat $\sinh' x = \cosh x$ en $\cosh' x = \sinh x$. Wat volgt hieruit dus voor de tweede orde afgeleiden, $\sinh'' x$ en $\cosh'' x$?

b. Bewijs op twee verschillende manieren dat $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, eenmaal rechtstreeks door uitschrijven van de definities en eenmaal door deze identiteit te differentiëren en gebruik te maken van onderdeel **a**.

c. In welke zin zijn deze functies analoog aan de gewone sinus en cosinus?

Hoofdstuk 5

Primitiveren

☞ **Theorie**

De afgeleide van een differentieerbare functie $f(x)$ is eenduidig bepaald, nl. $f'(x)$. Omgekeerd kun je je de vraag stellen van welke functie een gegeven functie $f(x)$ de afgeleide is. Het vinden van een functie $F(x)$ waarvan we de afgeleide $f(x) = F'(x)$ kennen noemen we *integreren* of *primitiveren.* De functie $F(x)$ noemen we een *primitieve* (of ook wel *onbepaalde integraal*) van $f(x)$. De reden waarom we niet over "*de*" primitieve praten is tevens de verklaring voor de toevoeging "onbepaald": integreren geeft géén eenduidig resultaat. Immers, als $f(x)$ een gegeven functie is en $F(x)$ een primitieve, dan is ook elke functie van de vorm $F_c(x) = F(x)+c$, met $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante, een primitieve. Immers $F_c'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ (merk op dat we hier het superpositieprincipe hebben toegepast, naast het feit dat de afgeleide van een constante functie de nulfunctie is). Op zo'n onbepaalde *integratieconstante* na is primitiveren wel ondubbelzinnig. Als je kunt differentiëren is primitiveren een kwestie van "reverse engineering": om een primitieve bij een gegeven functie te vinden dien je de Tabellen 4.1 en 4.2, evenals de rekenregels voor afgeleiden, "in omgekeerde volgorde" toe te kunnen passen. *Vergeet nooit de integratieconstante toe te voegen.*

❦

Voorbeeld. Primitiveer de functie $f(x) = 4x^3$.

Oplossing. Uit een voorgaande opgave (of rechtstreeks uit Tabel 4.2) blijkt dat $F(x) = x^4$ een primitieve is, immers $F'(x) = 4x^3 = f(x)$. De algemene oplossing is dus $F(x) = x^4 + c$, waarin $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige integratieconstante is. Je kunt ook als volgt te werk gaan als je niet onmiddellijk de juiste voorfactor weet te vinden. Stel $F(x) = Ax^4 + c$ (omdat je weet dat één of ander vierdegraads functie van deze vorm bij differentiëren de gewenste derdegraads functie $f(x) = 4x^3$ moet opleveren), met $A \in \mathbb{R}$ een nog nader te bepalen constante. Differentiëren levert $F'(x) = 4Ax^3$, hetgeen je gelijk moet stellen aan $f(x) = 4x^3$ *voor alle x.* Conclusie: $A = 1$ (waarom vind je voor c geen vergelijking?), dus $F(x) = x^4 + c$.

Voorbeeld. Primitiveer de functie $f(x) = \sin(3x+1)$.

Oplossing. Uit de derde regel in Tabel 4.1 volgt dat $\cos(3x+1)$ een primitieve is van $-3\sin(3x+1)$. Vermenigvuldigen we deze met $-\frac{1}{3}$ dan zien we dat $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)$ een primitieve is van $f(x) = \sin(3x+1)$. De algemene oplossing is dus $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)+c$, waarin $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige integratieconstante is. Als je dit niet onmiddellijk ziet (of je kent Tabel 4.1 niet uit je hoofd) volstaat het om "met een vooruitziende blik" te gissen. Stel je vermoedt dat de primitieve van $\sin(3x+1)$ zoiets moet zijn als $\cos(3x+1)$ "op één of andere factor na". Poneer dan een oplossing van het type $F(x) = A\cos(3x+1)+c$ en differentieer deze. Je vindt dan $F'(x) = -3A\sin(3x+1)$. Dit moet gelijk zijn aan $f(x) = \sin(3x+1)$, dus $-3A = 1$, ergo $A = -\frac{1}{3}$ (uiteraard vind je geen restrictie voor c). Hiermee heb je eveneens de primitieve gevonden: $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x+1)+c$.

Voorbeeld. Primitiveer de functie $f(x) = 2^x$.

Oplossing. Uit de derde regel in Tabel 4.1 volgt dat 2^x een primitieve is van $2^x \ln 2$. Vermenigvuldigen we deze met $\frac{1}{\ln 2}$ dan zien we dat $F(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x$ een primitieve is van $f(x) = 2^x$. De algemene oplossing is dus $F(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x + c$, waarin $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige integratieconstante is. Alternatieve methode: Stel $F(x) = A\,2^x + c$, dan $F'(x) = A\,2^x \ln 2$. Dit is gelijk aan de gegeven functie $f(x) = 2^x$ indien $A \ln 2 = 1$, dus $A = \frac{1}{\ln 2}$. Conclusie: $F(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x + c$.

✍ Oefeningen

43.

Verifieer Tabel 5.1 m.b.v. Tabel 4.2 en de rekenregels voor differentiëren v.z.v. nodig.

$f(x)$	$F(x)$	voorwaarden
x^a	$\dfrac{1}{a+1}\,x^{a+1}+c$	$((a \geq 0 \text{ of } a \in \mathbb{Z},\ a \neq -1) \text{ en } x \in \mathbb{R}) \quad \text{of} \quad (a \in \mathbb{R}^- \backslash \mathbb{Z} \text{ en } x > 0)$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
e^x	$e^x + c$	
$\ln\lvert x\rvert$	$x\,\ln\lvert x\rvert - x + c$	$x \neq 0$

Tabel 5.1: Deze tabel moet je, net als Tabel 4.2, altijd paraat hebben.

44.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal de algemene vorm van de primitieve $F(x)$. Vergeet de integratieconstante niet.

a. x^4

b. $\sqrt{x}$

c. $x^{\frac{1}{2}}$

d. x^{-2}

e. $\sqrt[3]{x}$

f. $\dfrac{1}{x}$

g. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

h. $x^{\frac{5}{2}}$

i. $x\sqrt{x}$

j. $x^{-\sqrt{2}}$

45.

Idem.

a. $\sin(3x)$

b. $\cos(\pi x)$

c. $\sin\left(\dfrac{1}{2}x + \pi\right)$

d. $\cos(2x - 1)$

e. $\sin\left(3(x + \dfrac{\pi}{4})\right)$

f. $\cos\left(\pi(x - \dfrac{1}{3}\sqrt{3})\right)$

g. $\sin\left(10^9 x\right)$

h. $\cos\left(10^{-9} x\right)$

i. $\sin(-x)$

j. $\cos(-x)$

46.

Idem.

a. 2^x

b. $10^{\frac{x}{2}}$

c. $\frac{1}{2}\log x$

d. $e^{-x\sqrt{5}}$

e. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

f. $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{10x}$

g. ${}^{10}\log(10x)$

h. $\dfrac{1}{2^x}$

i. $\dfrac{1}{e^{2x}}$

j. $\ln(3x)$

De primitieve van $f(x)$ wordt vaak aangeduid met $\int f(x)\,dx$ i.p.v. $F(x)$. (Dit bespaart ons de moeite om een nieuw symbool in te voeren bij iedere te primitiveren functie.) De integratieconstante zit al impliciet verscholen in deze notatie. Als dus $F(x)$ een primitieve is, dan is $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

De methode van "reverse engineering" toegepast op de produktregel voor differentiëren leidt tot een rekenregel voor primitiveren die bekend staat als de methode van *partiële integratie*. Roep in herinnering dat $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$. We wijzigen de notatie enigszins door f, f', g en g' te vervangen door F, f, G, respectievelijk g (F en G zijn dus primitieven van f, respectievelijk g). We krijgen dan (ga na!): $f(x)\,G(x) = (F(x)\,G(x))' - F(x)\,g(x)$. Primitiveren leidt nu tot het volgende resultaat (ga na!):

$$\int f(x)\,G(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int F(x)\,g(x)\,dx\,.$$

Het nut hiervan blijkt uit onderstaande voorbeelden. Het idee achter partieel integreren is dat je er moeilijke integralen (het linkerlid) mee kunt converteren naar (hopelijk) eenvoudigere (het rechterlid).

❦

Voorbeeld. Primitiveer de functie $h(x) = x\,e^x$.

Oplossing. Je herkent in dit functievoorschrift geen standaardfunctie. Wel herken je een produkt, bestaande uit twee factoren, e^x en x, waarvan je—in dit geval—wel afgeleiden en/of primitieven kent. Het idee is nu om één zo'n factor te identificeren met de functie $f(x)$ in bovenstaande rekenregel voor partieel integreren en de tweede met $G(x)$, zodat $h(x) = f(x)\,G(x)$ precies de te primitiveren functie in het linkerlid is. Stel we nemen $f(x) = e^x$ en $G(x) = x$. De overige functies die we nodig hebben zijn de primitieve van $f(x)$ en de afgeleide van $G(x)$: $F(x) = e^x$, $g(x) = 1$. De conversieregel luidt hiermee:

$$\int \underbrace{x}_{G}\,\underbrace{e^x}_{f}\,dx = \underbrace{x}_{G}\,\underbrace{e^x}_{F} - \int \underbrace{e^x}_{F}\,\underbrace{1}_{g}\,dx\,.$$

Inderdaad is de lastige primitieve in het linkerlid hiermee gereduceerd tot bekende gevallen:

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - e^x + c\,.$$

Verifieer zelf de oplossing door het rechterlid te differentiëren!

Alternatieve methode. Als je de produktregel voor differentiëren toepast op een functie van de vorm $p(x)\,e^x$, waarin $p(x)$ een n-de graads veelterm is, dan vind je $(p(x)\,e^x)' = p'(x)\,e^x + p(x)\,e^x = (p'(x) + p(x))\,e^x$. Nu is $p'(x) + p(x)$ wederom een veelterm van graad n, dus komen we tot de volgende algemene conclusie: De afgeleide van een "veeltermfunctie-maal-een-machtsfunctie" is weer een "veeltermfunctie-maal-een-machtsfunctie" met een veeltermfunctie van dezelfde graad. Het principe van "reverse engineering" is deze redenering om te draaien: Kennelijk kunnen we ook stellen dat de primitieve van een "veeltermfunctie-maal-een-machtsfunctie" weer een "veeltermfunctie-maal-een-machtsfunctie" is met een veeltermfunctie van dezelfde graad. In dit geval hebben we te maken met een eerstegraads veeltermfunctie. Poneer daarom een primitieve van de vorm

$$\int x\, e^x\, dx = (Ax + B)\, e^x + c\,.$$

Dit impliceert dat $x\, e^x = ((Ax + B)\, e^x + c)' = (Ax + A + B)\, e^x$. Omdat dit *voor alle* x moet gelden volgt hieruit dat $A = 1$ en $A + B = 0$, m.a.w. $A = 1$ en $B = -1$. Ergo:

$$\int x\, e^x\, dx = (x - 1)\, e^x + c\,.$$

☞

Theorie

De "kunst" bij partieel integreren is om de "juiste keuze" te maken voor de factoren $f(x)$ en $G(x)$ in het linkerlid. Er zijn namelijk altijd (minstens) twee (en soms meer) voor de hand liggende opties. Partieel integreren "werkt" als je $f(x)$ en $G(x)$ zó kunt kiezen dat

1. de te primitiveren functie gelijk is aan het produkt $f(x)G(x)$ (linkerlid),
2. je zowel een primitieve $F(x)$ van $f(x)$ kent als de afgeleide $g(x)$ van $G(x)$ (eerste term rechterlid),
3. je een primitieve kunt vinden voor de bijkomstige functie $F(x)g(x)$ (tweede term rechterlid).

❦

✍

Oefeningen

47.

Wat gebeurt er indien je de "verkeerde keuze" maakt door i.p.v. $f(x) = e^x$ en $G(x) = x$, zoals in bovenstaand voorbeeld, te veronderstellen dat $f(x) = x$ en $G(x) = e^x$. Werk dit uit zoals het voorbeeld en breng onder woorden waarom je vastloopt.

48.

Primitiveer de functie $h(x) = x\,\sin x$ op twee manieren:

a. Door een primitieve van de vorm $\int x\,\sin x\, dx = (Ax + B)\,\cos x + (Cx + D)\,\sin x$ te poneren.

b. Middels partiële integratie.

49.

Primitiveer de functie $h(x) = e^x \sin x$ op twee manieren:

a. Door een primitieve van de vorm $\int e^x \sin x \, dx = (A \cos x + B \sin x)\, e^x$ te poneren.

b. Middels partiële integratie. (*Hint:* Pas *tweemaal* partiële integratie toe.)

50.

Primitiveer de functie $h(x) = x^2\, e^x$ op twee manieren:

a. Door een primitieve van de vorm $\int x^2\, e^x \, dx = (Ax^2 + Bx + C)\, e^x + c$ te poneren.

b. Middels partiële integratie.

51.

Leg bij elk van de drie voorafgaande opgaven uit waarom de aldaar geponeerde primitieven zo gekozen zijn.

52.

Bepaal $\int x \, \ln|x| \, dx$.

Hoofdstuk 6

Eenvoudige differentiaalvergelijkingen

☞ **Theorie**

In de praktijk komt het vaak voor dat we een functie niet expliciet kennen, maar wel *impliciet* middels een verband tussen de functie en haar afgeleide(n). Zo'n verband noemen we een *differentiaalvergelijking*. Het bepalen van een functie die aan een bepaalde differentiaalvergelijking voldoet noemen we het *oplossen van de differentiaalvergelijking*. *Let op:* I.h.a. heeft een differentiaalvergelijking meer dan één oplossing!

❦

Voorbeeld. De afgeleide van de functie $f(x) = \sin x$ is $f'(x) = \cos x$. De tweede orde afgeleide (d.w.z. de afgeleide van de afgeleide) is $f''(x) = -\sin x$. Kennelijk geldt hier $f''(x) + f(x) = 0$. Omdat dit *voor alle* x geldt schrijven we meestal $f'' + f = 0$. Dit is een voorbeeld van een differentiaalvergelijking. Je mag uit dit voorbeeld concluderen dat $f(x) = \sin x$ *een* oplossing is van de differentiaalvergelijking $f'' + f = 0$, maar je mag *niet* concluderen dat dit *de* oplossing is.

✍ **Oefeningen**

53.

Stel $f'' + f = 0$. Uit het voorbeeld blijkt dat $f(x) = \sin x$ een oplossing is. Vind minstens twee andere niet-triviale oplossingen. Wat bedoelen we hier met "(niet-)triviaal"?

*Oplossing.*Het ligt voor de hand om ook $f(x) = \cos x$ te proberen. Deze voldoet inderdaad aan de differentiaalvergelijking. Een tweede oplossing is de *triviale oplossing* $f(x) = 0$. Merk op dat ook elk veelvoud van een gegeven oplossing wederom een oplossing is, dus $f(x) = A \sin x$ en $f(x) = B \cos x$

zijn óók oplossingen, ongeacht de waarde van de constanten A en B. Tenslotte geldt ook dat als je twee oplossingen hebt, hun som wederom een oplossing is. Dus $f(x) = A \sin x + B \cos x$ is wederom een oplossing. Men kan bewijzen dat dit de *algemene oplossing* is, m.a.w. elke oplossing is van dit type voor één of andere combinatie van constanten A en B.

54.

In onderstaande opgave is telkens een differentiaalvergelijking gegeven. Wat kun je zeggen over de algemene oplossing? Je hoeft niet te bewijzen dat je oplossing de algemene is, wel dien je je oplossing te verifiëren.

a. $f' = 0$

b. $f' = 1$

c. $f'' = 0$

d. $f' = f$

e. $f' = -f$

f. $f'' = 1$

g. $f'' = f'$

h. $f''' = 0$

i. $f'' + 9f = 0$

j. $f'' - f = 0$

55.

Idem. De differentiaalvergelijkingen bevatten nu constante parameters. Deze kunnen willekeurige (reële) waarden aannemen, tenzij anders vermeld.

a. $f' = c$

b. $f'' = c$

c. $f'' + \omega^2 f = 0 \quad (\omega > 0)$

d. $f' - k\,f = 0$

e. $f'' - \lambda^2 f = 0 \quad (\lambda > 0)$

56.

Welke van de differentiaalvergelijkingen uit de twee voorafgaande opgaven hebben een triviale oplossing $f(x) = 0$? Hoe herken je dit feit aan de vorm van de differentiaalvergelijking?

57.

Beschouw de differentiaalvergelijking $f'' + f = 0$ met beginvoorwaarden $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$.

a. Poneer een oplossing van het type $f(x) = A\,\sin\Omega x + B\,\cos\Omega x$ en ga na voor welke waarden van de parameters A, B en Ω deze voldoet aan de vergelijking.

b. Poneer een oplossing van het type $f(x) = \alpha\,\sin(\omega x + \phi)$ en ga na voor welke waarden van de parameters α, ω en ϕ deze voldoet aan de vergelijking.

c. Zijn de oplossingen uit **a** en **b** wezenlijk verschillend? (*Hint:* Goniometrische identiteiten, blz. 15.)

☞ **Theorie**

Enkele zeer belangrijke differentiaalvergelijkingen die je in de praktijk vaak tegen zult komen zijn de volgende. Onthou deze en hun algemene oplossingen.

$$\begin{aligned} f' &= c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ f'' &= c \quad (c \in \mathbb{R}) \\ f'' + \omega^2 f &= 0 \quad (\omega > 0) \\ f' - k\,f &= 0 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ f'' - \lambda^2 f &= 0 \quad (\lambda > 0) \end{aligned}$$

Ook hier geldt weer dat je in de praktijk vaak verschillende symbolen zult aantreffen voor de functie, haar variabelen en eventuele parameters.

❦

✍ **Oefeningen**

58.

Los op (voorop staat de naam van de functie met haar variabele).

a. $u(y):\quad u''' = 0$

b. $U(x):\quad UU' = E\quad$ met $E \in \mathbb{R}$ (*hint:* differentieer $U^2(x)$.)

c. $g(t):\quad g'' + 4\pi^2\,T^{-2}\,g = 0\quad$ met $T > 0$

d. $v(u):\quad v' = -v$

e. $\phi(z):\quad \phi'' + \tau\,\phi = 0\quad$ met $\tau < 0$

☞ Theorie

Omdat er in de algemene oplossing van een differentiaalvergelijking meestal vrije parameters voorkomen moeten er i.h.a. *nevenvoorwaarden* (ook wel aangeduid met *randvoorwaarden* of *beginvoorwaarden*, afhankelijk van de interpretatie) worden opgelegd om tot een eenduidige oplossing te komen. Hoeveel en welke nevenvoorwaarden je mag opleggen hangt af van de differentiaalvergelijking. Meestal is het zo dat het aantal nevenvoorwaarden overeenkomt met de hoogste orde afgeleide die voorkomt in de differentiaalvergelijking. De oplossingsstrategie voor een differentiaalvergelijking-met-nevenvoorwaarden is meestal rechttoe-rechtaan: Bepaal eerst de algemene oplossing (met vrije parameters) en onderwerp die vervolgens aan de nevenvoorwaarden om de vrije parameters vast te leggen.

❦

✍ Oefeningen

59.

Los op (voorop staat de naam van de functie met haar variabele).

a. $u(y)$: $u''' = 0$ met nevenvoorwaarden $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ en $u''(0) = 1$

b. $U(x)$: $UU' = E$ met $E \in \mathbb{R}$ met nevenvoorwaarde $U(0) = 0$.

c. $g(t)$: $g'' + 4\pi^2 T^{-2} g = 0$ met $T > 0$ met nevenvoorwaarden $g(0) = A$ en $g'(0) = 0$

d. $v(u)$: $v' = -v$ met nevenvoorwaarde $v(0) = N$

e. $\phi(z)$: $\phi'' - \tau\,\phi = 0$ met $\tau > 0$ met nevenvoorwaarden $\phi(0) = 1$ en $\phi'(0) = 0$

60.

Idem.

a. $u(y)$: $u''' = 0$ met nevenvoorwaarden $u(0) = c$, $u'(0) = b$ en $u''(0) = a$

b. $U(x)$: $UU' = E$ met $E \in \mathbb{R}$ met nevenvoorwaarde $U(0) = -1$.

c. $g(t)$: $g'' + 4\pi^2 T^{-2} g = 0$ met $T > 0$ met nevenvoorwaarden $g(0) = 0$ en $g'(0) = B$

d. $v(u)$: $v'' = -v'$ met nevenvoorwaarden $v(0) = N$ en $v'(0) = -N$

e. $\phi(z)$: $\phi'' - \tau\,\phi = 0$ met $\tau > 0$ met nevenvoorwaarden $\phi(0) = 0$ en $\phi'(0) = \sqrt{\tau}$

61.

We gaan hier iets nader in op de volgende differentiaalvergelijking met beginvoorwaarden:

$$\begin{cases} f'' + c\,f &= 0 \quad (c \in \mathbb{R}) \\ f(0) &= A \\ f'(0) &= B \end{cases}$$

Hierin zijn c, A en B constanten. We onderscheiden drie gevallen:

1. $c < 0$,
2. $c = 0$ en
3. $c > 0$.

Geef voor elk van de drie gevallen de oplossing. Gebruik uitsluitend de functies $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ (zie blz. 31) en/of veeltermfuncties. (*Hint:* Schrijf $c = -\lambda^2$ als $c < 0$ en $c = \omega^2$ als $c > 0$.)

Hoofdstuk 7

Toepassingen

62. Waarschuwingsborden.

a. Geef een meetkundige interpretatie van de waarschuwingsborden in Figuur 7.1. Wat is de hellingshoek in radialen resp. graden?

Figuur 7.1: Waarschuwingsborden J6, "steile helling" en J7, "gevaarlijke daling". (Bron: *Ministerie van Verkeer en Waterstaat*, http://www.verkeerenwaterstaat.nl.)

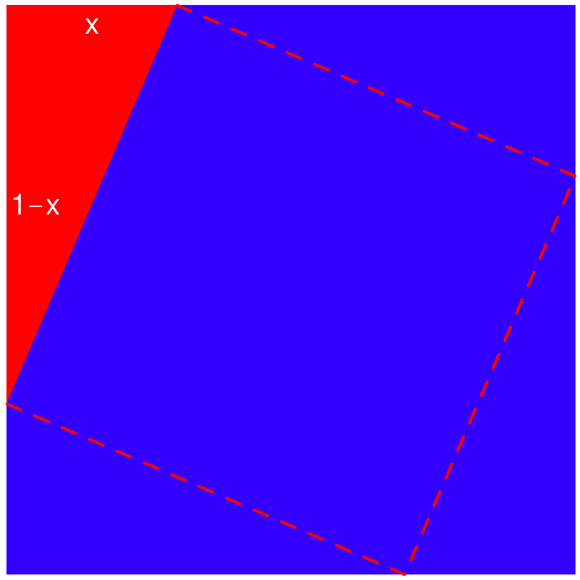
b. Je zit op de fiets en komt het bord J6 tegen. Eronder hangt een bordje met de mededeling "over een afstand van 1 km", hetgeen duidt op de afstand, gemeten langs de weg, waarop de waarschuwing betrekking heeft. Hoeveel bedraagt de totale *verticale* stijging van de klim? En welke afstand leg je hierbij *horizontaal* af?

c. Maak een tabel met vijf kolommen waarin je enkele realistische hellingspercentages uitzet, zeg $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\%$ (linkerkolom). Zet in een tweede kolom de overeenkomstige hellingshoeken in graden, in een derde kolom diezelfde hoek in radialen, in een vierde de verticale klim (in km) en in een vijfde de horizontaal af te leggen weg (eveneens in km). Rond alle getallen af op twee significante cijfers. Wat valt je op aan de getallen?

❦

63. Vouwen.

Figuur 7.2 toont een vierkant stuk papier met zijden van lengte 1. We maken hierin een vouw langs de aangegeven vouwlijn. Zo ontstaat een rechthoekige driehoek, waarvan één rechthoekszijde lengte x heeft en de andere lengte $1 - x$, waarbij $0 \leq x \leq 1$. Door dit te herhalen langs de overige zijden ontstaat een gekanteld, kleiner vierkant binnen het oorspronkelijke vierkant. De oppervlakte hiervan noemen we $A(x)$.



Figuur 7.2: Vierkant.

a. Laat zien dat de oppervlakte van het binnenste vierkant gelijk is aan $A(x) = 2\,x^2 - 2\,x + 1$.

b. Beredeneer wat $A(0)$ en $A(1)$ zouden moeten zijn en verifieer dit vervolgens m.b.v. de vergelijking uit onderdeel **a**.

c. Beredeneer dat het niet mogelijk is om x zó te kiezen dat het binnenste vierkant oppervlakte 0 heeft en verifieer dit m.b.v. de vergelijking uit onderdeel **a**.

d. Stel $A(x) = a$ voor één of andere constante $0 \leq a \leq 1$. Bepaal de bijbehorende waarde van x m.b.v. de vergelijking uit onderdeel **a**. Bewijs hiermee dat de oppervlakte van het binnenste vierkant altijd groter of gelijk is aan $\frac{1}{2}$.

e. Hoe moet je x kiezen opdat $A(x) = \frac{1}{2}$? Beredeneer dit eerst alvorens je gaat rekenen.

❦

64. Relativiteitstheorie.

Volgens de relativiteitstheorie vertegenwoordigt een deeltje met massa in rust een hoeveelheid energie volgens de welbekende formule van Einstein $E_0 = m_0\, c^2$. Hierin is m_0 de rustmassa van het deeltje en c de lichtsnelheid. De S.I.-eenheden voor massa en snelheid zijn respectievelijk kg en $\mathrm{m\,s^{-1}}$.

a. Bepaal de overeenkomstige S.I.-eenheid van energie.

Volgens de kwantummechanica bezit een massaloos foton een hoeveelheid energie die afhangt van zijn frekwentie, nl. $E = h\,f$. Hierin is f de frekwentie in S.I.-eenheid $\mathrm{s^{-1}}$ en h de zgn. constante van Planck.

b. Bepaal de S.I.-eenheid van de constante van Planck.

Volgens de relativiteitstheorie bezit een massaloos foton een hoeveelheid energie die afhangt van zijn impuls, nl. $E = p\,c$. Hierin is p de impuls in S.I.-eenheid $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ en c wederom de lichtsnelheid.

c. Ga na dat in deze formule “de eenheden kloppen”.

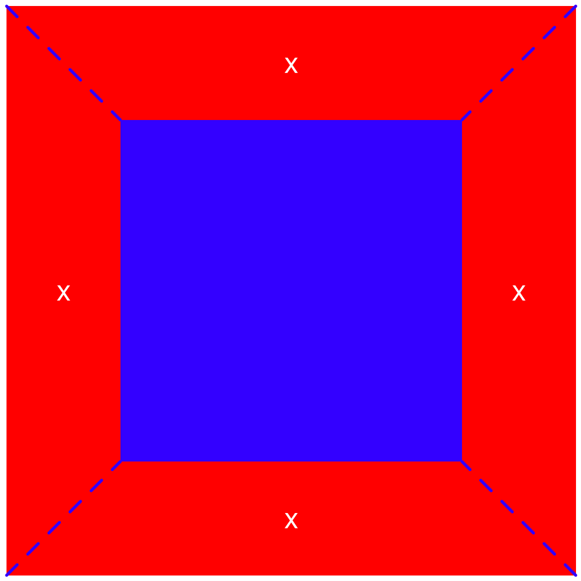
Een bewegend deeltje, met of zonder rustmassa m_0, vertegenwoordigt, wederom volgens de relativiteitstheorie, een totale energie $E = \sqrt{m_0^2\, c^4 + p^2\, c^2}$.

d. Ga na dat ook in deze formule “de eenheden kloppen”.

❦

65. Doos.

Figuur 7.3 toont een vierkant stuk papier met zijden van lengte 1. We vouwen hiervan een doos door vier diagonale inkepingen te maken zoals aangegeven met de stippellijnen, zodat er bij omvouwen een opstaande rand ter hoogte x ontstaat. We willen graag een "optimale" doos krijgen, d.w.z. met zo groot mogelijke inhoud.



Figuur 7.3: Doos.

a. Beargumenteer dat voor zinvolle waarden van x geldt $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

b. Laat zien dat de inhoud van de doos gelijk is aan $V(x) = 4\,x^3 - 4\,x^2 + x$.

c. Beredeneer wat $V(0)$ en $V(\frac{1}{2})$ zouden moeten zijn en verifieer dit vervolgens m.b.v. de vergelijking uit onderdeel **b**.

d. Laat zien dat de waarde van x waarvoor de doos maximale inhoud heeft voldoet aan de vergelijking $12\,x^2 - 8\,x + 1 = 0$ en los deze op. Welke van de twee oplossingen is de juiste?

e. Bewijs dat de maximale inhoud van de doos gelijk is aan $V_{\text{max}} = \frac{2}{27}$.

❦

66. Getijden.

De grafiek in Figuur 7.4 toont de getijdenwerking gedurende twee etmalen in Den Helder. Tabel 7.1 bevat enkele kwantitatieve gegevens omtrent het peil bij eb en vloed. Ofschoon de grafiek duidelijk afwijkt van een exacte sinusoïde kunnen we bij wijze van "eerste orde benadering" veronderstellen dat het waterpeil redelijk goed beschreven kan worden door het volgende model:

$$h(t) = A\,\cos(2\pi\frac{t-t_0}{T}) + b\,.$$

Hierin is $h(t)$ de hoogte van de waterstand (uitgedrukt in meters) op tijdstip t (in uren). De constanten $A > 0$, $T > 0$, en $t_0 \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$ zijn nader te bepalen modelparameters.

a. Beredeneer dat t_0 een tijdstip aanduidt waarop de waterstand maximaal is.

b. Beredeneer dat T de periode van één enkele eb-en-vloed beweging aangeeft.

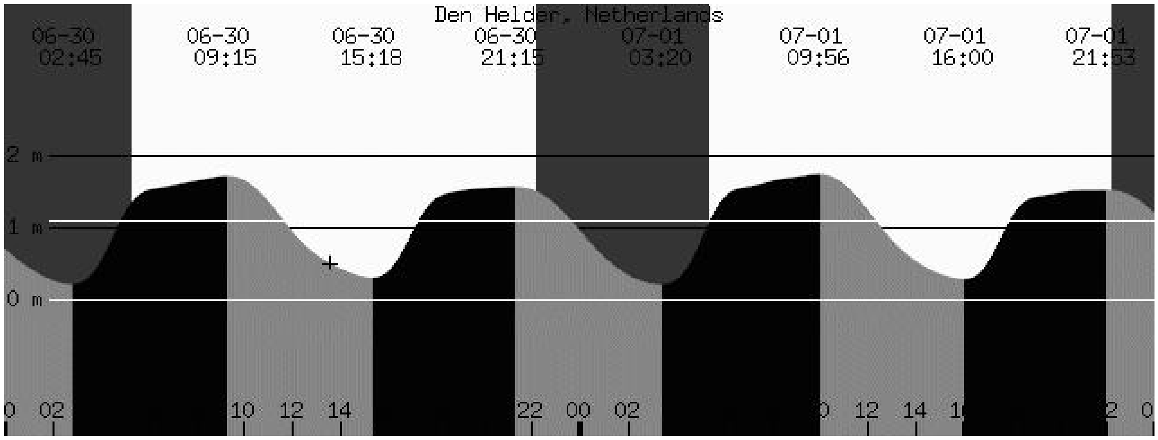
c. Bepaal geschikte waarden voor de modelparameters A, T, t_0 en b.

d. Op welke tijdstippen is volgens het model de waterstand minimaal (eb) respectievelijk maximaal (vloed)?

e. Op welke tijdstippen neemt volgens het model het waterpeil het snelst af respectievelijk toe? Bepaal ook de snelheid waarmee het waterpeil op dat moment verandert.

f. Je ligt te zonnen aan de waterlijn bij wassend tij op een moment zoals berekend in voorgaand onderdeel. Je wil je boeltje droog houden en beweegt dus met je handdoek, emmertjes en schepjes strand opwaarts. Het strand heeft een helling van 0.1%. Bereken de snelheid waarmee het waterfront (gemiddeld) langs het strand omhoog beweegt en dus de (minimale) snelheid waarmee je moet "verkassen".

❦



Figuur 7.4: Getijdenwerking voorspeld voor Den Helder. (Bron: *WWW Tide and Current Predictor*, http://tbone.biol.sc.edu/tide/.)

Den Helder, Netherlands 30 June 2003 - 1 July 2003 52.9667° N, 4.7500° E.

2003-06-30	02:45	CEST	0.21 meters	Low Tide
2003-06-30	05:18	CEST	Sunrise	
2003-06-30	09:15	CEST	1.71 meters	High Tide
2003-06-30	15:18	CEST	0.30 meters	Low Tide
2003-06-30	21:15	CEST	1.56 meters	High Tide
2003-06-30	22:10	CEST	Sunset	
2003-07-01	03:20	CEST	0.21 meters	Low Tide
2003-07-01	05:19	CEST	Sunrise	
2003-07-01	09:56	CEST	1.74 meters	High Tide
2003-07-01	16:00	CEST	0.28 meters	Low Tide
2003-07-01	21:53	CEST	1.52 meters	High Tide
2003-07-01	22:09	CEST	Sunset	
2003-07-02	03:51	CEST	0.21 meters	Low Tide

Tabel 7.1: Getijdenwerking voorspeld voor Den Helder. (Bron: *WWW Tide and Current Predictor*, http://tbone.biol.sc.edu/tide/.)

67. Chemotherapie.

Naast individuele eigenschappen zoals metabolisme en lichaamsbouw is lichaamsoppervlakte een belangrijk gegeven bij het bepalen van een adequate dosering van medicijnen bij chemotherapie. Omdat dit niet eenvoudig rechtstreeks te bepalen is is veel (empirisch) onderzoek verricht naar het verband tussen lichaamsoppervlakte en eenvoudiger vast te stellen grootheden, m.n. lichaamsgewicht en lengte. In 1916 stelden Du Bois en Du Bois aan de hand van 9 individuen van uiteenlopende leeftijd, lichaamsbouw en lengte de volgende formule op (Du Bois D., Du Bois E.F., *A formula to estimate the approximate surface area if height and weight be known.* Archives of Internal Medicine. 17:863-871, 1916):

$$\mathrm{BSA}(m,\ell) = c\, m^{\alpha}\, \ell^{\beta}\,.$$

Hierin staat BSA voor "body surface area" (in m^2), m voor massa (in kg) en ℓ voor lichaamslengte (in cm). Door de lichaamsoppervlakte rechtstreeks te meten m.b.v. mallen vonden Du Bois en Du Bois de waarden van de parameters c, α en β zoals aangegeven in Tabel 7.2. In 1970 stelden Gehan en George nieuwe parameters voor a.h.v. een grootschaliger en dus statistisch betrouwbaarder onderzoek naar de lichaamsoppervlakte van 401 individuen (Gehan E.A., George S.L., *Estimation of human body surface area from height and weight.* Cancer Chemotherapy Reports 54:225-235, 1970). Ofschoon zij geheel andere parameterwaarden vonden concludeerden zij dat het oorspronkelijke model van Du Bois en Du Bois, ondanks de twijfelachtige statistiek die eraan ten grondslag lag, voor de meeste individuen behoorlijk nauwkeurig was. Een derde model is dat van Mosteller (Mosteller R.D., *Simplified calculation of body-surface area.* New England Journal of Medicine. 317:1098, 1987). Dit is een "vuistregel", gebaseerd op het model van Gehan en George, met eenvoudig te onthouden parameterwaarden.

Doxorubicine wordt intraveneus toegediend ter behandeling van tumoren. Volgens de richtlijnen van het Integraal Kankercentrum Amsterdam bedraagt de aanbevolen dosering op dag 1 50–75 $\mathrm{mg/m^2}$.

a. Patiënt A is 175 cm lang en weegt 75 kg. De arts besluit hem een dosis van $50\,\mathrm{mg/m^2}$ toe te dienen. Bepaal volgens de drie BSA-modellen de totale dosis doxorubicine voor deze patiënt.

b. Stel een formule op voor de verhouding van de BSA van een gegeven patiënt volgens Mosteller t.o.v. die volgens Gehan & George. Karakteriseer vervolgens de categorie patiënten voor wie de formule van Mosteller exact hetzelfde resultaat geeft als die van Gehan & George.

De *body mass index* oftewel *Quetelet index* is een grove maat voor over- of ondergewicht. De definitie luidt:

$$\mathrm{BMI} = \frac{m}{L^2}\,,$$

waarin L de lichaamslengte is *in meter*. Als vuistregel mag je stellen dat iemand overgewicht heeft (respectievelijk lijdt aan obesitas) als $\mathrm{BMI} > 25$ (respectievelijk $\mathrm{BMI} > 30$). Ondergewicht treedt op bij $\mathrm{BMI} < 18.5$.

c. Toon aan dat patiënten waarvoor de formule van Mosteller ongeveer dezelfde BSA geeft als die van Gehan & George i.h.a. tenger van postuur zijn.

❦

	c	α	β
Du Bois & Du Bois	0.007184	0.425	0.725
Gehan & George	0.02350	0.51456	0.42246
Mosteller	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabel 7.2: BSA modelparameters. (Bron: http://www.halls.md/body-surface-area/refs.htm.)

Oplossing.

a. Volgens Du Bois & Du Bois: $\mathrm{BSA}_{\mathrm{DB\&DB}} = 1.90314\,\mathrm{m}^2$. Volgens Gehan & George: $\mathrm{BSA}_{\mathrm{G\&G}} = 1.92085\,\mathrm{m}^2$. Volgens Mosteller: $\mathrm{BSA}_{\mathrm{M}} = 1.90941\,\mathrm{m}^2$. Overeenkomstige doseringen zijn $d_{\mathrm{DB\&DB}} = 95.1568\,\mathrm{mg}$, $d_{\mathrm{G\&G}} = 96.0425\,\mathrm{mg}$ en $d_{\mathrm{M}} = 95.4703\,\mathrm{mg}$.

b. $\mathrm{BSA}_{\mathrm{M}}/\mathrm{BSA}_{\mathrm{G\&G}} = \gamma\, m^{-a}\, \ell^b$ met $\gamma = 0.70922$, $a = 0.01456$ en $b = 0.07754$. De categorie patiënten waarvoor $\mathrm{BSA}_{\mathrm{M}} = \mathrm{BSA}_{\mathrm{G\&G}}$ kan dus gekarakteriseerd worden door de vergelijking $\gamma\, m^{-a}\, \ell^b = 1$. Je kunt dit herschrijven tot een functioneel verband tussen lichaamsgewicht en lengte, als volgt: $m(\ell) = \gamma^{\frac{1}{a}}\, \ell^{\frac{b}{a}}$, oftewel $m(\ell) = k\, \ell^p$ met $k = 5.6421\, 10^{-11}$ en $p = 5.32555$.

c. Vul $m(\ell) = k\, \ell^p$ uit onderdeel **b** in in de formule $\mathrm{BMI} = \frac{m}{L^2}$ en vervang $L = 10^{-4}\ell$. Resultaat: $\mathrm{BMI}(\ell) = k'\, \ell^{p'}$ met $k' = 10^4\, k = 5.6421\, 10^{-7}$ en $p' = p - 2 = 3.32555$. Dit is een stijgende functie. Voor verreweg de meeste mensen geldt $\ell < 200$. Hiervoor geldt $\mathrm{BMI}(\ell) < \mathrm{BMI}(200) = 25.3297$, dus zeker geen zwaarlijvigheid. Voor de gemiddelde Nederlandse man geldt (in 2003) $\ell = 182.5$; de bijbehorende body mass index die nodig is om de twee body surface area berekeningsmethoden exact te doen samenvallen is $\mathrm{BMI}(182.5) = 18.6802$, hetgeen neigt naar ondergewicht.

68. Cyclotron.

In het Cyclotron op de TU/e campus (Figuur 7.5) worden radioactieve stoffen voor ziekenhuizen in heel Europa geproduceerd, zoals Jodium 123. Deze wordt gebruikt bij de diagnose van de ziekte van Parkinson. Jodium 123 verliest elke 13.2 uur (de *halfwaardetijd*) de helft van zijn radioactiviteit.

a. Beredeneer dat het aantal radioactieve atomen $N(t)$ op tijdstip t voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking, met $k \in \mathbb{R}^+$ een constante:

$$\begin{cases} N'(t) & = & -k\,N\,, \\ N(0) & = & N_0\,. \end{cases}$$

b. Bepaal $N(t)$.

c. Laat zien dat de constante k samenhangt met de halfwaardetijd τ volgens:

$$k = \frac{\ln 2}{\tau}\,.$$

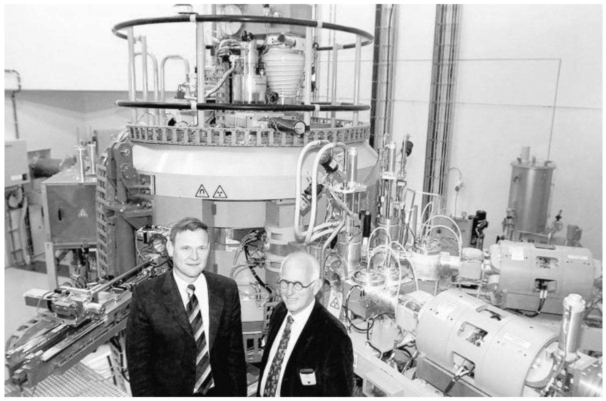
d. Laat m.b.v. onderdelen **b** en **c** zien dat de oplossing ook geschreven kan worden als

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}}\,.$$

Op tijdstip $t = 0$ direct na produktie wordt een hoeveelheid radioactief Jodium 123 op transport gesteld naar Athene, waar het 24 uur later aankomt.

e. Bereken het effectieve percentage radioactiviteit dat op dat moment resteert.

❦



Figuur 7.5: Ton Witsenboer, managing director van Amersham Health, en Prof. Martin de Voigt bij het nieuwe cyclotron van de TU/e. (Bron: BN/DeStem, 14 mei 2003, foto Rene Manders.)

Oplossing.

a. $N'(t)$ is de toename van het aantal radioactieve atomen per tijdseenheid op tijdstip t. Gegeven is dat deze toename negatief is (vandaar het minteken) en evenredig is met het aantal op tijdstip t nog aanwezige radioactieve atomen, m.a.w. $N(t)$. Noem de evenredigheidsconstante $-k$ met $k > 0$ en je vindt de differentiaalvergelijking.

b. $N(t) = N_0\, e^{-kt}$.

c. Tijdstip τ invullen in onderdeel **b** levert enerzijds $N(\tau) = N_0\, e^{-k\tau}$. Anderzijds is per definitie $N(\tau) = \frac{1}{2}\, N(0) = \frac{1}{2}\, N_0$. Conclusie: $e^{-k\tau} = \frac{1}{2}$. Door de logarithme te nemen krijg je $-k\tau = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, m.a.w. $k = \frac{\ln 2}{\tau}$.

d. Vul $k = \frac{\ln 2}{\tau}$ in $N(t) = N_0\, e^{-kt}$ in. Resultaat: $N(t) = N_0\, e^{-\frac{\ln 2}{\tau}t} = N_0\, (e^{\ln\frac{1}{2}})^{\frac{t}{\tau}} = N_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{\tau}}$.

e. Het gevraagde percentage wordt gegeven door $p = \frac{N(t)}{N(0)} \times 100\%$ met $t = 24.0$ uur, dus $p = (\frac{1}{2})^{\frac{24.0}{13.2}} \times 100\% = 28.4\%$.

69. Studieschuld.

BMT student Bram Platzak heeft eindelijk zijn diploma gehaald. Hij zit nu met een studieschuld van €12.000 die moet worden afgelost. Voorlopig heeft hij daar echter geen geld voor, zodat de schuld a.g.v. rente verder oploopt.

a. Zij $S(t)$ de studieschuld op tijdstip t, uitgedrukt in jaren en gerekend vanaf het moment van afstuderen, en $S_0 = €12.000$. Beredeneer dat, tot aan het moment waarop Bram Platzak begint met aflossen, de studieschuld groeit volgens een differentiaalvergelijking van het type:

$$\begin{cases} S'(t) & = & k\,S(t) \\ S(0) & = & S_0\,. \end{cases}$$

Hierin is $k > 0$ een constante.

b. Stel dat de rente $\rho = 5\%$ per jaar bedraagt. Los de differentiaalvergelijking op, rekening houdend met de beginvoorwaarde, en druk de constante k uit in het rentepercentage ρ. (*Hint:* Beargumenteer dat $\rho = \frac{S(1)-S(0)}{S(0)} \times 100\%$.)

c. Laat zien dat je de oplossing kunt schrijven als

$$S(t) = S_0\,(1+\rho)^t\,.$$

d. Na hoeveel jaar zal zijn studieschuld zich verdubbeld hebben indien Bram Platzak niet tussentijds aflost?

❦

Oplossing.

a. De toename van de totale schuld per tijdseenheid a.g.v. rente, S'(t), is op elk moment evenredig met de totale schuld $S(t)$, d.i. het geleende bedrag inclusief de opgebouwde renteschuld. Dus $S'(t) = k\,S(t)$. Uiteraard is k positief, anders zou de schuld afnemen. Op tijdstip $t = 0$ is gegeven dat $S(0) = S_0$.

b. Oplossing: $S(t) = S_0\,e^{kt}$. De onbekende constante k hangt uiteraard samen met de hoogte van de rente ρ. Na 1 jaar hebben we bij een rentepercentage ρ een opgebouwde schuld van $S(1) = (1+\rho)\,S_0$. Anderzijds volgt door $t = 1$ in te vullen in onze oplossing hierboven dat $S(1) = S_0\,e^k$. conclusie: $e^k = 1+\rho$ oftewel $k = \ln(1+\rho)$. Als $\rho = 5\% = 0.05$ dan is dus $k = \ln(1.05) = 0.04879$.

c. $S(t) = S_0\,e^{kt} = S_0\,(e^k)^t = S_0\,(e^{\ln(1+\rho)})^t = S_0\,(1+\rho)^t$.

d. Stel dat na τ jaar de schuld verdubbeld is. Dan geldt dus $S(\tau) = 2S(0) = 2S_0$. Anderzijds vinden we door $t = \tau$ in te vullen in de oplossing $S(\tau) = S_0\,e^{k\tau}$. Dus $e^{k\tau} = 2$ oftewel $\tau = \frac{\ln 2}{k} = \frac{\ln 2}{\ln(1+\rho)}$. Met $\rho = 5\% = 0.05$ vinden we dus een verdubbelingstijd van $\tau = \frac{\ln 2}{\ln 1.05} = 14.2$ jaar.

70. Cardiofitness.

Het Studenten Sport Centrum van de TU/e (Figuur 7.6) heeft o.a. een cardiofitnesscentrum, waar je je overtollige energie kwijt kunt raken. Een van de beste manieren om dat te doen is hardlopen op een zogenaamde "treadmill" (lopende band). Tabel 7.3 geeft het energieverbruik per tijdseenheid en per massa-eenheid voor een drietal snelheden.

snelheid v (km/uur)	energieverbruik p ($\mathrm{W\,kg^{-1}}$)
0	< 2
8.3	9.45
12.0	14.55
17.5	20.22

Tabel 7.3: Energieverbruik op de treadmill. (Bron: Bannink, G.B. en van Ruiten, Th.M., *BioData*, Uitgeverij Nijgh Versluys b.v., Baarn, Nederland, 1999.)

Na invoering van je lichaamsgewicht geeft het digitale display van de treadmill o.m. het totale energieverbruik weer. We gaan nu zelf de ingebouwde energiemeter ijken a.h.v. de voor handen zijnde gegevens, d.w.z. we gaan een functie opstellen die ons voor iedere loopsnelheid het overeenkomstige energieverbruik levert. Daarbij gaan we uit van de volgende benaderingen:

- Het energieverbruik bij snelheid 0 is 0. (We verwaarlozen dus de offset "< 2" in de tabel.)
- Het energieverbruik is evenredig met de loopsnelheid.

Als P het geleverde vermogen is en m je lichaamsgewicht, dan geldt dus volgens ons model voor het energieverbruik per tijdseenheid en per massa-eenheid, $p = P/m$, als functie van de loopsnelheid, v:

$$L : p = k\,v\,.$$

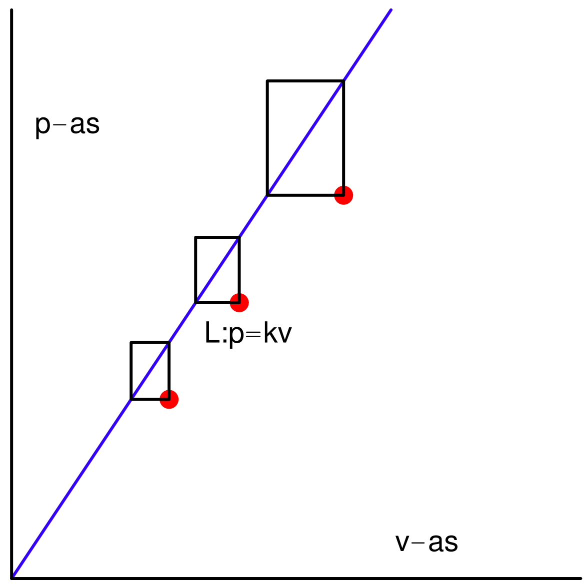
Hierin is $k > 0$ een nog nader te bepalen richtingscoëfficiënt. Figuur 7.7 toont de meetgegevens van Tabel 7.3 uitgezet in het (v, p)-vlak. We willen nu k zó kiezen dat de lijn L "zo goed mogelijk" bij de drie datapunten past (merk op dat drie punten i.h.a. niet op één lijn liggen). Met "zo goed mogelijk" bedoelen we dat de gezamenlijke oppervlakte van de aangegeven rechthoekjes—waarvan twee zijden de meetpunten horizontaal en verticaal verbinden met de lijn—minimaal is.

a. Noem, voor een willekeurige waarde van de richtingscoëficiënt $k > 0$, de totale oppervlakte van de rechthoekjes $A(k)$. Duid voor het gemak de meetpunten aan met $(v_1, p_1) = (8.3, 9.45)$, $(v_2, p_2) = (12.0, 14.55)$ resp. $(v_3, p_3) = (17.5, 20.22)$. Stel het functievoorschrift op van $A(k)$.

b. Bepaal de waarde van k en dus de "ideale" lijn L waarvoor $A(k)$ minimaal is. (*Hint:* Differentiëren.)

c. Je loopt zes minuten met een snelheid van 16.0 km/uur. Bereken, uitgaande van je eigen lichaamsgewicht, je loopvermogen (energieverbruik per seconde, d.i. $P = p\,m$) evenals je totale energieverlies na afloop ($E = P\Delta t$). Hoeveel 60-Watt gloeilampen kun je met eenzelfde vermogen laten branden?

Figuur 7.6: Het Studenten Sport Centrum op de TU/e campus en de cardiofitnessruimte met op de achtergrond enkele treadmills. (Bron: http://www.tue.nl/sportcentrum/.)



Figuur 7.7: Data met modellerende lijn. De getekende lijn is duidelijk te steil: Door de lijn iets te laten “zakken” wordt immers de totale oppervlakte van de rechthoekjes kleiner.

71. Bevolkingsgroei.

De omvang van de wereldbevolking bedroeg in het jaar 2000 ($t=0$) circa $N=6\,100$ miljoen mensen. We veronderstellen dat de omvang van de wereldbevolking $x(t)$ op tijdstip t voldoet aan de zogenaamde "logistische vergelijking"

$$x'(t) = \alpha\, x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{M}\right) .$$

Hierin zijn α en M positieve constanten. Populatie x en tijd t worden hierbij gerekend in miljoenen, respectievelijk jaren.

a. Beredeneer dat als $M \gg N$ we de oplossing voor niet al te grote waarden van t mogen benaderen door $M=\infty$ te nemen, d.w.z. door de factor $1 - x(t)/M$ achterwege te laten, zodat

$$x'(t) \approx \alpha\, x(t) .$$

Laat zien dat onder deze aanname de oplossing met de beginvoorwaarde $x(0) = N$ gegeven wordt door

$$x(t) \approx N\, e^{\alpha\, t} .$$

b. Beredeneer dat de factor $1 - x(t)/M$ een remmende invloed heeft op de groei van de wereldbevolking. Wat zouden hiervan oorzaken kunnen zijn?

c. De oplossing van de exacte differentiaalvergelijking onder beginvoorwaarde $x(0)=N$ is

$$x(t) = \frac{M\, N\, e^{\alpha\, t}}{N\, e^{\alpha\, t} + (M-N)} .$$

Bewijs dit door $x(t)$ te substitueren in de differentiaalvergelijking en de beginvoorwaarde te controleren.

d. Empirisch is vastgesteld dat $\alpha \approx 0.0186$ en $M \approx 26\,286$. Gebruik deze waarden om te voorspellen wanneer de wereldbevolking zich zal hebben verdubbeld ten opzichte van het aantal in 2000. (Ter vergelijking: Volgens een recente verklaring van de *US National Academy of Sciences* en de *British Royal Society* wordt een verdubbeling van de wereldbevolking verwacht rond het jaar 2050.)

Oplossing. Door $x(t_\star)=2\,N$ te stellen volgt

$$t_\star = \frac{1}{\alpha}\, \log\left(1+\frac{M}{M-2N}\right) \approx 56.6 .$$

Dus volgens ons model mogen we ons rond het jaar 2056 verheugen op een verdubbeling van de wereldpopulatie, in redelijke overeenstemming met genoemde verklaring.

❦

Deel II

Oplossingen

Elementaire algebraïsche vaardigheden

1.

a. $9\,a^2 - 6\,a\,b + b^2$

b. $9\,a^2 - 12\,a^3 + 4\,a^4$

c. $162 - 108\,\sqrt{2}$

d. $3\,m^2 - 5\,m\,n - 2\,n^2$

e. $6 + 2\,\sqrt{3}$

f. $\dfrac{1}{9}\,a^8\,b^2 - 2\,a^6\,b^4 + 9\,a^4\,b^6$

g. $21 - 12\,a^2$

h. $-5 - 7\,a + 6\,a^2 + 7\,b + a\,b - 2\,b^2$

i. $\dfrac{16}{5}$

j. $-1 + 81\,a^4$

3.

a. $p^{16}\,q^{16}$

b. $a^{11}\,b^5$

c. $-\dfrac{4\,d^{10}}{9\,c}$

d. $-27\,a^3\,b^{\frac{3}{2}}$

e. $2\,\sqrt{2}\,a\,|b|$

f. $\sqrt{2}\,p^{\frac{9}{4}}\,q^{\frac{5}{12}}$

g. $-\dfrac{3}{a^3\,b^8}$

h. $\sqrt{2\,\sqrt{3}}\,a\,b^{\frac{3}{4}}$

i. $\dfrac{3\,b^{\frac{7}{2}}}{2\,a^{\frac{8}{3}}}$

j. $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{2\,\sqrt[4]{2}}$

5.

a. $(2\,x-3)\,(2\,x+3)\,(4\,x^2+9)$

b. $3\,x^3\,(x-7)\,(x+3)$

c. $(x^8+1)\,(x^4+1)\,(x^2+1)\,(x+1)\,(x-1)$

d. $(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2})\,(x^2+3)$

e. $(x-17)\,(x-2)$

f. $(x-17)\,(x+2)$

g. $(x-1)^2$

h. $(x-1)\,(x^2+x+1)$

i. $(x-5)\,(5x+1)$

j. $(x-\sqrt{2})^2$

7.

Idem.

a. $(x-6)\,(3x-2)$

b. $(v+2)\,(2v+3)$

c. $\dfrac{1}{3}\,(y-\sqrt{3})\,(3y-\sqrt{6})\,(y+\sqrt{3})\,(3y+\sqrt{6})$

d. $(-a+5)\,(2a+3)$

e. $(\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\,m+1)\,(2m-3\sqrt{2})$

f. $(p-13)\,(p+2)$

g. $(\phi-7)\,(\phi+4)$

h. $2\,(2\xi-1)\,(2\xi+1)\,(2\xi^2+1)$

i. $2\,(k-\sqrt{3})\,(k+\sqrt{3})$

j. $-s\,(s-1)\,(s+13)$

9.

a. $(x-1)\,(x+1)\,(x-4)$

b. $(a-2)\,(a+2)\,(a+5)$

c. $(p-1)\,(p^2+(1-\sqrt{3})\,p+1)$

d. $(3\gamma^2+2)\,(\gamma-4)$

e. $-\dfrac{1}{2}\,(\lambda-2)\,(2\,\lambda+\sqrt{6})\,(2\,\lambda-\sqrt{6})$

f. $(t-3)\,(2\,t^2+1)$

g. $-\dfrac{1}{3}\,(y-2)\,(3\,y+\sqrt{6})\,(3\,y-\sqrt{6})$

h. $(r+1)\,(r-1)\,(r-8)$

i. $\dfrac{1}{3}\,(u+5)\,(3\,u+2\sqrt{3})\,(3\,u-2\sqrt{3})$

j. $(z-1)\,(z^2+(1-\sqrt{2})\,z+1)$

11.

Maak naar analogie van de vorige opgave staartdelingen om de volgende breuken te herleiden tot veeltermen "plus restbreuk". Met restbreuk bedoelen we een term in de vorm van een breuk waarin de veelterm in de noemer een hogere graad heeft dan die in de teller.

a. $2\,x - 2 - \dfrac{1}{x-1}$

b. $2\,x + 1 - \dfrac{2}{x+1}$

c. $2\,x^2 + x - 3 + \dfrac{1}{x+1}$

d. $2\,x^2 - 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$

e. $1 + \dfrac{1}{x^3+1} \quad \text{of} \quad 1 + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{2-x}{x^2-x+1}$

13.

a. $x = -6 \quad \text{of} \quad x = 7$

b. $t = -\sqrt{2} \quad \text{of} \quad t = \sqrt{2}$

c. $y = -1 \quad \text{of} \quad y = \sqrt{2}$

d. $p = -1 \quad \text{of} \quad p = -\dfrac{1}{3}$

e. $a = \dfrac{1}{2} \quad \text{of} \quad a = 2$

f. $u = -1 \quad \text{of} \quad u = 1 \quad \text{of} \quad u = \sqrt{3}$

g. $q \notin \mathbb{R}$

h. $r = -1 \quad \text{of} \quad r = 1 \quad \text{of} \quad r = -\dfrac{1}{3}$

i. $s = 0$

j. $z = 1$

Goniometrie

15.

- $\sin\alpha = \sin\beta$ d.e.s.d.a. $\alpha = \beta + k\,2\pi$ of $\alpha = \pi - \beta + k\,2\pi$; i.h.a. is er precies één waarde voor $k \in \mathbb{Z}$ waarvoor $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$; als één der hoeken gelijk is aan $\frac{\pi}{2}$ of $\frac{3\pi}{2}$, dan vallen beide oplossingen samen. Meetkundige verklaring: De eenheidscirkel bevat i.h.a. twee punten met dezelfde y-coördinaat, tenzij $y = \pm 1$.

- $\cos\alpha = \cos\beta$ d.e.s.d.a. $\alpha = \beta + k\,2\pi$ of $\alpha = -\beta + k\,2\pi$; i.h.a. is er precies één waarde voor $k \in \mathbb{Z}$ waarvoor $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$; als één der hoeken gelijk is aan 0 of π, dan vallen beide oplossingen samen. Meetkundige verklaring: De eenheidscirkel bevat i.h.a. twee punten met dezelfde x-coördinaat, tenzij $x = \pm 1$.

- $\tan\alpha = \tan\beta$ d.e.s.d.a. $\alpha = \beta + k\pi$; i.h.a. zijn er precies twee waarden voor $k \in \mathbb{Z}$ waarvoor $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$; de twee oplossingen vallen in dit geval nooit samen. Meetkundige verklaring: De grafiek van $y = \tan x$ is π-periodiek en monotoon en bevat voor elke waarde van y precies één punt x waarvoor $y = \tan x$. Op een 2π-interval zijn er dus precies twee zulke punten. (In dit geval kun je de toevoeging “bijna altijd” dus weglaten.)

17.

Leid zelf de volgende goniometrische identiteiten af uit bovenstaande theorie of met behulp van de eenheidscirkel. Vermeld ook de voorwaarden waaraan de argumenten moeten voldoen.

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$: Spiegeling t.o.v. de x-as leidt tot een tekenwisseling van de y-coördinaat van elk punt op de eenheidscirkel.

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$: Spiegeling t.o.v. de x-as leidt niet tot een tekenwisseling van de x-coördinaat van een punt op de eenheidscirkel.

- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$: Deze eigenschap volgt nu uit de voorgaande twee.

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$: Dit volgt uit de goniometrische identiteit voor $\sin(\alpha+\beta)$ door $\beta = \alpha$ te nemen.

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$: Dit volgt uit de goniometrische identiteit voor $\cos(\alpha+\beta)$ door $\beta = \alpha$ te nemen.

- $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$: Dit volgt uit voorgaande identiteit door $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ in te vullen.

- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$: Idem, maar door $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ in te vullen

- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\,\tan\beta}$: Deze eigenschap volgt door de definitie van tan in termen van sin en cos te gebruiken, samen met de goniometrische identiteiten voor $\sin(\alpha \pm \beta)$ en $\cos(\alpha \pm \beta)$.

- $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$: Vul in het rechterlid de definitie van $\tan\alpha$ in en maak er één breuk van; gebruik daarbij $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

19.

- $\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$: Als α de aanliggende rechthoekszijde is, dan is de overliggende rechthoekszijde gelijk aan $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, oftewel: De x-coördinaat van het bij hoek α behorende punt op de eenheidscirkel is gelijk aan de y-coördinaat van het bij hoek $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ behorende punt op de eenheidscirkel.
- $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$: Idem.
- $\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\dfrac{1}{\tan\alpha}$:Deze gelijkheid volgt nu uit bovenstaande twee.

Exponentiële en logaritmische functies

21.

a. $x = 1$

b. $x = 1 \quad \text{of} \quad x = 2$

c. $x = \dfrac{e+1}{e-1}$

d. $x = \dfrac{e+1}{e-1} \quad \text{of} \quad x = \dfrac{e-1}{e+1}$

e. $x = \sqrt{5}$

f. $x = 0 \quad \text{of} \quad x = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \quad \text{of} \quad x = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

g. $x \in \emptyset$

h. $x = \sqrt[3]{2}$

i. $x = 10^{10}$

j. $x \in \mathbb{R}$

Differentiëren

23.

a. 0

b. 1

c. $2\,x$

d. $3\,x^2$

e. $4\,x^3$

25.

De volgende tabel maakt aannemelijk dat

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\,.$$

h	e^h-1	$\dfrac{e^h-1}{h}$
1	1.71828	1.71828
0.1	$1.05171\,10^{-1}$	1.05171
0.01	$1.00502\,10^{-2}$	1.00502
0.001	$1.00005\,10^{-3}$	1.00050
0.0001	$1.00005\,10^{-4}$	1.00005

Hieruit volgt dat

$$[e^x]'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\,(e^h-1)}{h}=e^x\,\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\,.$$

27.

a. $4\,x^3$

b. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

c. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

d. $-\dfrac{2}{x^3} \quad (x \neq 0)$

e. $\dfrac{1}{3\,\sqrt{x^3}} \quad (x > 0)$

f. $-\dfrac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

g. $-\dfrac{1}{2\,x\,\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

h. $\dfrac{5}{2}\,x\,\sqrt{x} \quad (x > 0)$

i. $\dfrac{3}{2}\,\sqrt{x} \quad (x > 0)$

j. $-\dfrac{\sqrt{2}}{x^{1+\sqrt{2}}} \quad (x > 0)$

29.

a. $2^x\ \ln 2$

b. $\dfrac{1}{2}\,\ln 10\,10^{\frac{x}{2}}$

c. $-\dfrac{1}{x\ \ln 2} \quad (x > 0)$

d. $-\sqrt{5}\,e^{-x\sqrt{5}}$

e. $-\dfrac{\ln 2}{2^x}$

f. $-10\ \ln 10\,\left(\dfrac{1}{10}\right)^{10x}$

g. $\dfrac{1}{x\ \ln 10} \quad (x > 0)$

h. $-\ln 2\,\dfrac{1}{2^x}$

i. $-\dfrac{2}{e^{2x}}$

j. $\dfrac{1}{x} \quad (x > 0)$

31.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal $f'(x)$ en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele x moet voldoen.

a. $e^x\,(x+1)$

b. $e^{-x}\,(\cos x - \sin x)$

c. $-\dfrac{1}{x^2}$

d. $2\,\cos(2\,x)$ of $2\,(cos^2 x - \sin^2 x)$

e. $2\ (e^x + 1)\ (x+1)\ (1 + e^x\,(x+2))$

f. $\ln x$

g. $2\,(x+1)\ (\cos(2\,x-1) - (x+1)\ \sin(2\,x-1))$

h. $\dfrac{2}{x\,(x^2+1)\ \ln 10} - \dfrac{2\ln\left(x^2+1\right)}{x^3\ \ln 10}$

i. $-4\ \cos x\ \sin x$

j. $2e^{-x}\,(2\cos(2x)\cos(3x) - \cos(3x)\sin(2x) - 3\sin(2x)\sin(3x))$

33.

Voor willekeurige, differentieerbare f, g, h volgt door tweemaal de produktregel toe te passen:

$$\begin{aligned}&(f(x)\,g(x)\,h(x))' = (f(x)\,g(x))'\,h(x) + (f(x)\,g(x))\,h'(x)\\ = \quad &(f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x))\,h(x) + (f(x)\,g(x))\,h'(x) = f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) + f(x)\,g(x)\,h'(x)\,.\end{aligned}$$

I.h.a. geldt dat de afgeleide van een produktfunctie met k factoren bestaat uit k termen, waarbij elke term het produkt is van $k-1$ van de oorspronkelijke factoren en de afgeleide van de overige factor.

35.

a. $f'(g(x))\,g'(x) = 1$ oftewel $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$. Je mag hierin ook f en g verwisselen.

b. $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ respectievelijk $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$, m.a.w. f en g zijn elkaars inverse. Nu is $f'(x) = 2\,x$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, dus $f'(g(x)) = 2\sqrt{x} = \dfrac{1}{g'(x)}$ en $g'(f(x)) = \dfrac{1}{2\,x} = \dfrac{1}{f'(x)}$.

37.

Enerzijds vind je met de kettingregel $h'(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)}\,\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{x}$. Anderzijds geldt dat $h(x) = \ln x - \ln a$, dus $h'(x) = \frac{1}{x}$. De laatste eigenschap van de logaritmische functie verklaart waarom de uitkomst niet van a afhangt.

39.

In onderstaande onderdelen is telkens $f(x)$ gegeven. Bepaal $f'(x)$ en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele x moet voldoen.

a. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

b. $\dfrac{x\,\cos x - \sin x}{x^2}$

c. $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

d. $\dfrac{e^x\,(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

e. $\dfrac{10^x\,(\ln 10 - x + x^2\,\ln 10)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

f. $\dfrac{-4\,\sin(2\,x) - 2\,\cos(3x)\,\sin(2\,x) + 3\,\cos(2\,x)\,\sin(3\,x)}{(2+\cos(3\,x))^2)}$

g. $-\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$ of $-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

h. $\dfrac{4\,x}{(1-x^2)^2}$

i. $\dfrac{2\,x}{(x^2+2)^2}$

j. $\dfrac{3-\sqrt[3]{x}}{6\,(\sqrt[3]{x}-1)^2\,\sqrt{x}}$

41.

In onderstaande onderdelen is telkens een functievoorschrift in één variabele en één of meer parameters gegeven. Bepaal de bijbehorende afgeleide (m.b.t. de variabele dus) en vermeld daarbij ook eventuele voorwaarden waaraan de variabele en de parameter(s) moeten voldoen.

a. $u'(t) = \frac{2}{a}\,(\frac{t}{a} + 1) \quad (a \neq 0)$

b. $f'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r\,R}} \quad (r\,R > 0)$

c. $g'(u) = -\frac{p}{u^{p+1}} \quad (u > 0)$

d. $z'(t) = \frac{2\pi t}{T}\,\cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi) \quad (T \neq 0)$

e. $V'(r) = -\frac{\ln 2}{\rho}\,\frac{V_0}{2^{\frac{r}{\rho}}} \quad (\rho \neq 0)$

f. $u'(\phi) = 3\,A\,\cos(3\,(\phi + \frac{\pi}{4}))$

g. $x'(a) = (1 + a\,c)\,e^{c\,a}$

h. $y'(\alpha) = -4\,\cos\alpha\,\sin\alpha$

i. $h'(y) = 2\,C\,e^{-\lambda\,y}\,(2\,\omega\cos(2\,\omega\,y)\,\cos(3\,\omega\,y) - \lambda\,\sin(2\,\omega\,y)\,\cos(3\,\omega\,y) - 3\,\omega\,\sin(2\,\omega\,y)\,\sin(3\,\omega\,y))$

j. $S'(R) = \frac{1}{R_0}\,\ln\frac{R}{R_0} \quad (R_0\,R > 0)$

Primitiveren

43.

- Als $F(x) = \dfrac{1}{a+1}\, x^{a+1} + c$ dan $F'(x) = \left[\frac{1}{a+1}\, x^{a+1} + c\right]' =$ (superpositieprincipe) $= \frac{1}{a+1}\left[x^{a+1}\right]' + c' =$ (Tabel 4.2, eerste regel) $= x^a = f(x)$.
- Als $F(x) = \ln|x| + c$ dan $F'(x) = [\ln|x| + c]' =$ (superpositieprincipe) $= \ln'|x| + c' =$ (Tabel 4.2, laatste regel) $= \frac{1}{x} = f(x)$.
- Als $F(x) = -\cos x + c$ dan $F'(x) = [-\cos x + c]' =$ (superpositieprincipe) $= -\cos' x + c' =$ (Tabel 4.2, derde regel) $= \sin x = f(x)$.
- Als $F(x) = \sin x + c$ dan $F'(x) = [\sin x + c]' =$ (superpositieprincipe) $= \sin' x + c' =$ (Tabel 4.2, tweede regel) $= \cos x = f(x)$.
- Als $F(x) = \sin x + c$ dan $F'(x) = [e^x + c]' =$ (superpositieprincipe) $= [e^x]' + c' =$ (Tabel 4.2, vierde regel) $= e^x = f(x)$.
- Als $F(x) = x\,\ln|x| - x + c$ dan $F'(x) = [x\,\ln|x| - x + c]' =$ (superpositieprincipe) $= [x\,\ln|x|]' - x' + c' =$ (produktregel) $= x'\,\ln|x| + x\,\ln'|x| - x' + c' =$ (Tabel 4.2, eerste en laatste regel) $= \ln|x| = f(x)$.

45.

a. $-\dfrac{1}{3}\,\cos(3x) + c$

b. $\dfrac{1}{\pi}\,\sin(\pi x) + c$

c. $2\,\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right) + c$

d. $\dfrac{1}{2}\,\sin(2x - 1) + c$

e. $-\dfrac{1}{3}\,\cos\left(3(x + \dfrac{\pi}{4})\right) + c$

f. $\dfrac{1}{\pi}\,\sin\left(\pi(x - \dfrac{1}{3}\sqrt{3})\right) + c$

g. $-10^{-9}\,\cos\left(10^9 x\right) + c$

h. $10^9\,\sin\left(10^{-9}x\right) + c$

i. $\cos x + c$

j. $\sin x + c$

47.

Stel $f(x) = x$ en $G(x) = e^x$, dus:

$$\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{G} \, dx = \underbrace{\frac{1}{2}\,x^2}_{F} \underbrace{e^x}_{G} - \int \underbrace{\frac{1}{2}\,x^2}_{F} \underbrace{e^x}_{g} \, dx \, .$$

Terwijl je onder de integraal in het linkerlid een functie had van de vorm “eerstegraads veeltermfunctie maal e-macht” zie je in het rechterlid een functie van de nog lastiger gedaante “tweedegraads veeltermfunctie maal e-macht” opdoemen, waarmee je de graad van complexiteit dus niet verlaagt.

49.

Primitiveer de functie $h(x) = e^x \sin x$ op twee manieren:

a. Poneer $\int e^x \sin x \, dx = (A \cos x + B \sin x)\, e^x + c$. Differentiëren van het rechterlid zou dan de integrand uit het linkerlid moeten opleveren: $[(A \cos x + B \sin x)\, e^x + c]' = ((A + B) \cos x + (B - A) \sin x)\, e^x$. Dit is slechts identiek aan $e^x \sin x$ indien $A + B = 0$ en $B - A = 1$, oftewel indien $A = -\dfrac{1}{2}$ en $B = \dfrac{1}{2}$, m.a.w. $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\,(\sin x - \cos x)\, e^x + c$.

b. Partiële integratie (neem bijv. $e^x = f(x)$ en $\sin x = G(x)$ in de eerste stap en $e^x = f(x)$ en $\cos x = G(x)$ in de tweede):

$$\int e^x \sin x \, dx = (\text{eerste p.i.}) = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = (\text{tweede p.i.}) = e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right\} .$$

Door de identieke (!) integralen aan weerszijden naar links te brengen volgt (uiteraard op een constante term na!):

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x \, .$$

Hiermee vind je hetzelfde antwoord als voorheen.

51.

- Een primitieve van $h(x) = x \sin x$ is van de vorm $\int x \sin x \, dx = (A\,x + B) \cos x + (C\,x + D) \sin x + c$, omdat bij differentiëren van een “eerstegraads veelterm maal een sinusoïde” (d.i. sinus of cosinus) volgens de produktregel en het superpositieprincipe wederom een “eerstegraads veelterm maal een sinusoïde” ontstaat (en omdat een constante term altijd wegvalt). (Ga zelf na waarom de cosinusterm echt nodig is.)

- Een primitieve van $h(x) = e^x \sin x$ is van de vorm $\int e^x \sin x \, dx = (A \cos x + B \sin x)\, e^x + c$, omdat bij differentiëren van een “e-macht maal een sinusoïde” volgens de produktregel wederom een “e-macht maal een sinusoïde” ontstaat. (Ga zelf na waarom de cosinusterm echt nodig is.)

- Een primitieve van $h(x) = x^2\, e^x$ is van de vorm $\int x^2\, e^x \, dx = (A\,x^2 + B\,x + C)\, e^x + c$, omdat bij differentiëren van een “veelterm maal een e-macht” volgens de produktregel en het superpositieprincipe wederom een “veelterm (van dezelfde graad!) maal een e-macht” ontstaat.

Eenvoudige differentiaalvergelijkingen

53.

Het ligt voor de hand om naast $f(x) = \sin x$ ook $f(x) = \cos x$ te proberen. Deze voldoet inderdaad aan de differentiaalvergelijking. (Merk op dat i.h.a. geldt dat de tweede orde afgeleide van een sinusoïde, zeg $f(x) = \sin(\omega x)$ of $f(x) = \cos(\omega x)$, diezelfde sinusoïde oplevert op een constante, *negatieve* factor na.) Een andere oplossing is de *triviale oplossing* $f(x) = 0$, d.i. de nulfunctie. Merk op dat ook elk veelvoud van een gegeven oplossing wederom een oplossing is, dus $f(x) = A\,\sin x$ en $f(x) = B\,\cos x$ zijn óók oplossingen, ongeacht de waarde van de constanten A en B. Tenslotte geldt ook dat als je twee oplossingen hebt, hun som wederom een oplossing is. Dus $f(x) = A\,\sin x + B\,\cos x$ is wederom een oplossing. Merk op dat hier het superpositieprincipe is toegepast. (Men kan bewijzen dat dit de *algemene oplossing* is, m.a.w. elke oplossing van $f'' + f = 0$ is van dit type voor één of andere combinatie van constanten A en B.)

54.

In de volgende oplossingen zijn a, b en c telkens willekeurige constanten, tenzij anders vermeld.

a. $f(x) = a$

b. $f(x) = x + a$

c. $f(x) = ax + b$

d. $f(x) = a\,e^x$

e. $f(x) = a\,e^{-x}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + ax + b$

g. $f(x) = a\,e^x + b$

h. $f(x) = ax^2 + bx + c$

i. $f(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$

j. $f(x) = a\,e^{-x} + b\,e^x$

55.

Hoofdletters A en B geven nu willekeurige constanten in de algemene oplossing weer, ter onderscheid van de parameters.

a. $f(x) = cx + A$

b. $f(x) = \dfrac{1}{2}c\,x^2 + Ax + B$

c. $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

d. $f(x) = A\,e^{kx}$

e. $f(x) = A\,e^{\lambda x} + B\,e^{-\lambda x}$

57.

a. De differentiaalvergelijking vereist $\Omega = \pm 1$. Zonder verlies van algemeenheid mag je $\Omega = 1$ kiezen. In dat geval vereisen de randvooraarden dat $A = 1$ en $B = 0$.

b. Wederom volgt $\omega = \pm 1$ uit de differentiaalvergelijking. Kies $\omega = 1$. Dan volgt uit de randvoorwaarden dat $\alpha = 1$ en $\phi = 0 \pmod{2\pi}$.

c. De oplossingen uit **a** en **b** zijn identiek. Ook zonder de randvoorwaarden zijn ze niet wezenlijk verschillend, omdat je m.b.v. goniometrische identiteiten de parameters A en B uit de eerste kunt relateren aan de parameters α en ϕ uit de tweede, vice versa. Immers, stel $\Omega = \omega$, dan volgt m.b.v. de formule $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$:

$$\alpha\,\sin(\omega\,x + \phi) = \alpha\,\cos\phi\,\sin(\omega x) + \alpha\,\sin\phi\,\cos(\omega x) = A\,\sin(\omega x) + B\,\cos(\omega x)\,,$$

indien we $A = \alpha\,\cos\phi$ en $B = \alpha\,\sin\phi$ stellen. Anderom: $\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}$ en ϕ is die hoek waarvoor geldt $\tan\phi = B/A$.

59.

a. $u(y) = \dfrac{1}{2}\,y^2$

b. $U(x) = \pm\sqrt{2\,E\,x}$

c. $g(t) = A\,\cos\left(\dfrac{2\,\pi\,t}{T}\right)$

d. $v(u) = N\,e^u$

e. $\phi(z) = \cosh(\sqrt{\tau}\,z)$

61.

1. $c < 0$: Met $\lambda = \sqrt{-c}$ vind je $f(x) = A\,\cosh(\lambda x) + \dfrac{B}{\lambda}\,\sinh(\lambda x)$.
2. $c = 0$: $f(x) = B\,x + A$
3. $c > 0$: Met $\omega = \sqrt{c}$ volgt $f(x) = A\,\cos(\omega\,x) + \dfrac{B}{\lambda}\,\sin(\omega\,x)$.

EINDE