

Tentamen Stochastische OR op dinsdag 16 januari 2007, 14.00 – 17.00 uur.

Voor degenen die het tentamen 2YD18 dan wel 2DD21 doen geldt de volgende toetsregeling: Het eindcijfer van de toets van 10 november 2006 kan ingezet worden ter vervanging van het cijfer voor som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

De toetsregeling geldt NIET voor degenen die het tentamen 2DD06 dan wel 2DL09 doen.

1. Het productieproces van een produkt bestaat uit 3 stappen, A, B, en C, die achtereenvolgens doorlopen moeten worden. Na iedere stap wordt het produkt getest. De uitkomst van de test kan zijn:

- Er is een kleine fout opgetreden. Dezelfde stap moet door het produkt nogmaals doorlopen worden. Dit gebeurt met kans $1/6$.
- Er is een grote fout opgetreden. Het produkt wordt helemaal teruggezet in het productieproces en moet opnieuw beginnen bij stap A. Dit gebeurt met kans $1/6$.
- De stap is succesvol afgerond. Na stap A en B betekent dit dat het produkt naar de volgende stap door kan gaan. Na stap C betekent dit dat het produkt het productieproces succesvol heeft afgerond. Dit gebeurt met kans $2/3$.

Iedere stap in het productieproces duurt, inclusief de test, precies 1 dag. Een test na stap A kost 100 euro, een test na stap B kost 75 euro en een test na stap C kost 50 euro.

- a) Geef een Markov model waarmee het verloop van een produkt op opeenvolgende dagen in het productieproces beschreven kan worden.
- b) Wat is de kans dat een produkt uiteindelijk het gehele productieproces succesvol doorstaat?
- c) Wat zijn de totale verwachte testkosten van een produkt gedurende het productieproces?
- d) Stel dat we dagelijks starten met 32 nieuwe produkten in stap A van het productieproces. Hoeveel produkten bevinden zich dan op den lange duur gemiddeld op een dag in de 3 verschillende stappen van het productieproces?
- e) Stel dat produktiestap A niet 1 maar 2 dagen duurt. Geef aan hoe het Markov model aangepast moet worden om het verloop van een produkt op opeenvolgende dagen in het productieproces in de nieuwe situatie te beschrijven.

2. Op een machine wordt een bepaald type produkt op order geproduceerd. Orders arriveren volgens een Poisson proces met een intensiteit van 2 orders per uur (1 order = 1 produkt). De produktie vindt plaats in batches en er kunnen maximaal 3 produkten tegelijk in een batch geproduceerd worden.

Men hanteert de volgende produktiestrategie:

- als er nieuwe orders staan te wachten op het moment dat de produktie van een batch is afgerond, wordt onmiddellijk gestart met de produktie van een nieuwe batch. Als er op zo'n moment $k \leq 3$ orders staan te wachten zullen er ook k produkten tegelijk in de nieuwe batch geproduceerd worden. Als er $k > 3$ orders staan te wachten zullen er 3 produkten tegelijk in de nieuwe batch geproduceerd worden.
- als er *geen* nieuwe orders staan te wachten op het moment dat de produktie van een batch is afgerond, start men met de produktie van een nieuwe batch zodra er een nieuwe order arriveert. In dit geval zal er dus altijd maar 1 produkt in de nieuwe batch geproduceerd worden.

De produktietijd van een batch is stochastisch en exponentieel verdeeld met een gemiddelde duur van 60 minuten. Verder geldt dat de produktietijd van een batch niet afhangt van het aantal produkten in de batch. Orders die arriveren als er al 5 wachtende orders in het systeem zijn gaan verloren. Onder wachtende orders verstaan we hier orders die niet horen bij produkten die in de batch zitten waarvan de produktie reeds gestart is.

De toestand van het systeem wordt beschreven door een continue-tijd Markov keten. Hierbij wordt enerzijds aangegeven hoeveel wachtende orders er in het systeem zijn en anderzijds wordt aangegeven of de machine wel of geen batch aan het produceren is. In het vervolg geven we met toestand $(n, +)$, respectievelijk $(n, -)$, aan dat er n wachtende orders in het systeem zijn en dat de machine wel, respectievelijk niet, een batch aan het produceren is.

- a) Geef de intensiteitenmatrix of het overgang-intensiteiten diagram van de continue-tijd Markov keten.
- b) Geef een stelsel vergelijkingen waarmee de limietkansen op de mogelijke toestanden uitgerekend kunnen worden.

De limietkansen op de toestanden zijn (**deze kansen behoeft u niet af te leiden!!**):

$$p(0, -) = 0.112, p(0, +) = 0.223, p(1, +) = 0.173, p(2, +) = 0.164,$$

$$p(3, +) = 0.109, p(4, +) = 0.073, p(5, +) = 0.146.$$

- c) Welk deel van de orders gaat op den lange duur verloren?
- d) Wat is het gemiddeld aantal batches dat op den lange duur per dag (=24 uur) geproduceerd wordt?
- e) Hoeveel produkten zitten er op den lange duur gemiddeld in een batch?

3. Bij een benzinstation zijn drie autowasstraten ingericht. Er arriveren volgens een Poisson proces gemiddeld 12 automobilisten per uur voor een wasbeurt van hun auto. Automobilisten, die aankomen op een moment dat alle wasstraten bezet zijn en er nog 2 wachtende auto's zijn, hebben niet voldoende geduld of tijd, rijden direct weer weg en komen niet terug. Een wasbeurt heeft een exponentieel verdeelde tijdsduur met een gemiddelde van 10 minuten. De bedieningsdiscipline bij de wasstraten is FCFS; er kan maar één auto tegelijk in een wasstraat. De wastijden van verschillende auto's zijn onderling onafhankelijk. Aangenomen mag worden dat de wasbeurten van opeenvolgende auto's in een wasstraat direct op elkaar aansluiten; het in- en uitrijden van de wasstraat kost een verwaarloosbare tijd.
- Bepaal de limietkansen op de mogelijke aantallen auto's, die voor een wasbeurt in het benzinstation zijn.
 - Bereken de bezettingsgraad van een wasstraat.
 - Bereken de gemiddelde doorlooptijd van een auto die gewassen wordt.
4. Een machine bevat 2 onderdelen die parallel werken en die onafhankelijke levensduren hebben. De levensduren van de onderdelen zijn continue stochastische variabelen die uniform verdeeld zijn op het interval tussen 0 en 2 jaar. De machine kan gewoon doorwerken als één van de twee onderdelen stuk is. Pas als *beide* onderdelen stuk zijn valt de machine stil. Op zo'n moment wordt een correctieve vervanging van de machine gedaan. De kosten van zo'n correctieve vervanging zijn 1000 euro. Het aantal keren $\{N(t), t \geq 0\}$ dat er correctieve vervangingen van de machine plaats vinden in het interval $[0, t]$ is een vernieuwingsproces.
- Wat zijn de lange-termijn gemiddelde kosten per jaar?
- Er wordt overwogen om niet alleen correctieve vervangingen van de machine te doen, maar om ook preventieve vervangingen te doen op het moment dat de machine één jaar lang onafgebroken gewerkt heeft. De kosten van zo'n preventieve vervanging zijn 500 euro. Het aantal keren $\{\tilde{N}(t), t \geq 0\}$ dat er preventieve dan wel correctieve vervangingen van de machine plaats vinden in het interval $[0, t]$ is wederom een vernieuwingsproces.
- Wat zijn de lange-termijn gemiddelde kosten per jaar in deze nieuwe situatie?

Normering:

Alle vijftien onderdelen wegen even zwaar mee.