

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21) op vrijdag 11 januari 2008, 09.00 – 12.00 uur. Het eindcijfer van de toets van 31 oktober 2007 kan ingezet worden ter vervanging van het cijfer voor som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

1. In een bedrijf staan vier identieke, storingsgevoelige machines die onafhankelijk van elkaar werken. Een machine die aan het begin van week n ($n = 0, 1, 2, \dots$) werkt, kan met kans $1/2$ in de loop van die week stuk gaan. In dat geval wordt de machine gedurende week $n + 1$ gerepareerd. De machine werkt dan weer aan het begin van week $n + 2$. Het aantal werkende machines aan het begin van opeenvolgende weken is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 1/16 & 4/16 & 6/16 & 4/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

- Leg de kansen in de vierde rij van de overgangsmatrix uit.
- Stel dat je op een gegeven moment aan het begin van de week 1 werkende machine hebt. Hoeveel weken duurt het dan gemiddeld totdat voor het eerst aan het begin van een week alle machines werken?
- Geef een volledig stelsel vergelijkingen waarmee de limietkansen van het aantal werkende machines berekend kunnen worden.

De limietverdeling van het aantal werkende machines wordt gegeven door (**deze kansen heeft u niet af te leiden!**):

$$\pi_0 = \frac{1}{81}, \pi_1 = \frac{8}{81}, \pi_2 = \frac{24}{81}, \pi_3 = \frac{32}{81}, \pi_4 = \frac{16}{81}.$$

- Welk deel van de weken zal, op de lange termijn, een willekeurige machine aan het begin van de week werken respectievelijk in reparatie zijn?

Het bedrijf heeft 2 reparateurs in vaste dienst voor het doen van reparaties aan de machines. Elke reparateur kan in een week echter maar 1 machine repareren. Daarom huurt het bedrijf tijdelijk extra reparateurs in als er in een bepaalde week aan meer dan 2 machines tegelijk reparatiewerk gedaan moet worden.

- Welk deel van de weken zal, op de lange termijn, een willekeurige reparateur in vaste dienst reparatiewerk te verrichten hebben?

Aangezien de bezettingsgraad van de reparateurs in vaste dienst relatief laag is, overweegt het bedrijf om in de toekomst het reparatiewerk alleen nog maar te laten verrichten door de reparateurs in vaste dienst. Als er in een bepaalde week aan meer dan 2 machines tegelijk reparatiewerk verricht moet worden, zal een deel van dit reparatiewerk zodoende uitgesteld worden tot de volgende week.

- f) Geef de overgangsmatrix van de Markov keten in deze nieuwe situatie.
2. In een winkel is in principe 1 kassa geopend waar klanten kunnen afrekenen. Echter zodra er 3 klanten bij de kassa staan wordt een tweede kassa geopend. Deze tweede kassa blijft open net zolang totdat het totaal aantal klanten bij de kassa's weer tot 2 gereduceerd is. Het aankomstproces van klanten bij de kassa's is een Poisson proces met een intensiteit van 12 klanten per uur. De bedieningstijden van klanten zijn exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 5 minuten. Klanten die bij aankomst bij de kassa's 4 andere klanten aantreffen zijn ongeduldig en lopen verontwaardigd weg.
- a) Bepaal de limietverdeling van het aantal klanten bij de kassa's.
- b) Wat is op de lange termijn de fractie van het aantal klanten dat verontwaardigd wegloopt?
- c) Wat is de gemiddelde tijd die een klant, die niet verontwaardigd wegloopt, bij de kassa's staat (wachtend of in bediening)?
- d) Hoe lang duurt gemiddeld een periode dat er onafgebroken 2 kassa's geopend zijn?
3. Een werkstation bevat drie machines die parallel werken en, onafhankelijk van elkaar, na een exponentieel verdeelde tijd met een gemiddelde van 3 dagen stuk gaan. Het werkstation blijft gewoon doorwerken als één of twee van de machines stuk zijn. De produktie van het werkstation is echter evenredig met het aantal werkende machines. Als er i werkende machines zijn is de opbrengst van de produktie in het werkstation gelijk aan $1000 \cdot i$ euro per dag. Als alle drie de machines stuk zijn vindt een gemeenschappelijke reparatie van de drie machines plaats. De tijd die zo'n gemeenschappelijke reparatie vergt is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van een halve dag.
- a) Laat zien dat de lange-termijn gemiddelde opbrengst van de produktie van het werkstation per dag gelijk is aan 1500 euro.

Er wordt overwogen om kapotte machines al te repareren (en als gevolg daarvan ook de produktie van het hele werkstation stop te zetten) op het moment dat twee van de drie machines stuk zijn. Neem aan dat de verdeling van de reparatietijd door deze maatregel niet verandert.

- b) Wat is de lange-termijn gemiddelde opbrengst van de produktie van het werkstation per dag in deze nieuwe situatie?
4. Beschouw een produktiesysteem met drie werkstations S_1, S_2 en S_3 . In alle drie de werkstations staat één machine waarop jobs bewerkingen ondergaan. Nieuwe jobs komen aan bij S_1 en ondergaan daar de eerste bewerking. Na een bewerking op S_1 (voor het eerst of herhaald) wordt een job doorgestuurd naar S_2 . Na een bewerking op S_2 (voor het eerst of herhaald) wordt een job doorgestuurd naar S_3 . Na een bewerking op S_3 (voor het eerst of herhaald) wordt $1/5$ van de jobs weer teruggestuurd naar S_1 om de bewerkingen op S_1, S_2 en S_3 opnieuw te ondergaan en verlaat $4/5$ het produktiesysteem. De bewerkingstijden van een job op de stations zijn stochastisch, onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met een gemiddelde van respectievelijk 2

minuten op S_1 , 1 minuut op station S_2 en 2 minuten op station S_3 . Men wil de totale werklast in het produktiesysteem beheersen. Het totaal aantal jobs, dat op ieder moment in S_1, S_2 en S_3 samen aanwezig is, wordt constant gelijk aan 5 gehouden. Elke keer als een job bij S_3 het produktiesysteem verlaat, wordt bij S_1 een nieuwe job toegelaten; er liggen altijd nieuwe jobs op toelating te wachten. Door deze werklastbeheersing kan het produktiesysteem beschreven worden als een gesloten netwerk met 5 jobs (klanten) en drie stations S_1, S_2 en S_3 .

- a) Beschrijf de toestandruimte van het netwerk en laat zien dat de limietkans $p(k_1, k_2, k_3)$ op k_1 jobs in S_1 , k_2 jobs in S_2 en k_3 jobs in S_3 voor een willekeurige toestand (k_1, k_2, k_3) in de toestandruimte geschreven kan worden als $p(k_1, k_2, k_3) = C \cdot 2^{k_1+k_3}$ met C een normeringsconstante.

Het blijkt dat de normeringsconstante C gelijk is aan $1/321$.

De kansen $p_1(k_1)$ dat er k_1 klanten in station S_1 zijn worden gegeven door

k_1	0	1	2	3	4	5
$p_1(k_1)$	0.1963	0.1931	0.1869	0.1745	0.1495	0.0997

De kansen $p_2(k_2)$ dat er k_2 klanten in station S_2 zijn worden gegeven door

k_2	0	1	2	3	4	5
$p_2(k_2)$	0.5981	0.2492	0.0997	0.0374	0.0125	0.0031

De kansen $p_3(k_3)$ dat er k_3 klanten in station S_3 zijn worden gegeven door

k_3	0	1	2	3	4	5
$p_3(k_3)$	0.1963	0.1931	0.1869	0.1745	0.1495	0.0997

- b) Hoeveel bewerkingen (voor het eerst of herhaald) worden er per uur respectievelijk in de stations S_1, S_2 en S_3 uitgevoerd?
- c) Wat is de gemiddelde tijd dat een job zich, wachtend of in bewerking, in station S_3 bevindt per keer dat station S_3 bezocht wordt?

Het produktiesysteem is, zoals hiervoor beschreven, in werkelijkheid een open systeem met de gegeven werklastbeheersing.

- d) Bereken het gemiddeld aantal jobs dat per uur door het produktiesysteem gaat en bepaal de totale gemiddelde verblijftijd W_{tot} (uren) van een job door het produktiesysteem.

Normering:

1a	b	c	d	e	f	2a	b	c	d	3a	b	4a	b	c	d
1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2