TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2YD18) op woensdag 14 januari 2009, 09.00 – 12.00 uur. Het eindcijfer van de toets van dit studiejaar kan ingezet worden ter vervanging van het cijfer voor som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

---

1. In een produktiestation werken twee machines parallel, een snelle en een langzame. Jobs die geproduceerd worden op de snelle machine hebben een geometrisch verdeelde produktietijd met parameter 1/3. Hierbij is als tijdseenheid een minuut genomen. Dit wil dus zeggen dat de produktie van een job op de snelle machine iedere minuut met kans 1/3 afgerond wordt en met kans 2/3 voortgezet. Jobs die geproduceerd worden op de langzame machine hebben een geometrisch verdeelde produktietijd met parameter 1/4. De produktie van een job op de langzame machine wordt dus iedere minuut met kans 1/4 afgerond en met kans 3/4 voortgezet.

   Jobs worden bij voorkeur op de snelle machine geproduceerd. Echter, als de snelle machine bezet is op het moment dat een nieuwe job zijn produktie kan starten, dan wordt ook de langzame machine gebruikt. Wanneer de produktie van een job eenmaal gestart is op de langzame machine, dan wordt die ook op de langzame machine afgemaakt (ook als gedurende de produktie de snelle machine beschikbaar komt).

   De tijden tussen twee opeenvolgende aankomsten van jobs bij het produktiestation zijn geometrisch verdeeld met parameter 1/2. Dit betekent dat er iedere minuut met kans 1/2 wel een nieuwe job arriveert bij het produktiestation en met kans 1/2 arriveert er gedurende die minuut geen nieuwe job bij het produktiestation. Jobs die arriveren op het moment dat er al 4 andere jobs in het produktiestation zijn gaan verloren. Hierbij nemen we aan dat jobs die hun bewerking afronden in een minuut waarin een nieuwe job arriveert, het produktiestation al verlaten hebben op het moment dat de nieuwe job arriveert (in iedere minuut hebben we dat eerst potentiele vertrekken van jobs plaatsvinden en daarna potentiele aankomsten).

   Met X_n noteren we het aantal jobs in het produktiestation aan het begin van de n-de minuut. Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1^-, 1^+, 2, 3, 4\}$. Hier stelt 1^- de toestand voor met 1 job in het produktiestation die geproduceerd wordt op de langzame machine en 1^+ stelt de toestand voor met 1 job in het produktiestation die geproduceerd wordt op de snelle machine. De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{17}{24} \end{pmatrix}.$$

   a) Leg de kansen uit in de vijfde rij van de overgangsmatrix.

   b) Hoeveel minuten duurt het gemiddeld todat voor het eerst beide machines tegelijk produceren, als aan het begin van de eerste minuut er geen jobs in het produktiestation zijn.

De limietverdeling van de discrete tijd Markov keten wordt gegeven door:

$$\pi_0 = 0.102, \quad \pi_{1^-} = 0.053 \quad \pi_{1^+} = 0.199 \quad \pi_2 = 0.267, \quad \pi_3 = 0.204, \quad \pi_4 = 0.175.$$

c) Neem aan dat de produktiekosten van de snelle en de langzame machine, als ze aan het produceren zijn, respectievelijk 50 euro en 40 euro per minuut zijn.
Wat zijn op de lange termijn de verwachte produktiekosten per uur?

d) Bereken de doorzet op de lange termijn van de snelle, respectievelijk de langzame, machine (i.e., het verwachte aantal produkten dat op de lange termijn per uur op de snelle, respectievelijk de langzame machine geproduceerd wordt).

e) Stel dat een job waarvan de produktie op de langzame machine gestart is **wel** op de snelle machine afgemaakt kan worden als die snelle machine ergens gedurende de produktie van de job vrijkomt. Laat zien hoe in dit geval de situatie gemodelleerd kan worden door middel van een discrete tijd Markov keten (geef toestandsruimte en overgangsmatrix in deze nieuwe situatie).

2. Een machine bevat 5 identieke onderdelen die onafhankelijk van elkaar defect kunnen gaan. Bij ieder werkend onderdeel treden storingen op volgens een Poisson proces met een intensiteit van 2 storingen per week (= 5 werkdagen). Als een onderdeel kapot gaat kunnen de overige onderdelen gewoon doorwerken. Naast de storingen van de individuele onderdelen treden er ook nog totale storingen op volgens een Poissonproces met een intensiteit van 1 storing per week. Door zo'n totale storing gaan alle op dat moment werkende onderdelen tegelijk kapot. Voor de reparatie van de onderdelen zijn twee reparateurs beschikbaar. Voor een reparatie van een onderdeel is maar één reparateur nodig (de andere reparateur kan, indien nodig, op dat moment een ander kapot onderdeel repareren). Bovendien kan iedere monteur maar aan één onderdeel tegelijk werken. De reparatieduur van een onderdeel is exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van 1 werkdag. Met $X(t)$ geven we het aantal werkende onderdelen op tijdstip t weer.

a) Geef de intensiteitenmatrix R van de continue-tijd Markov keten $\{X(t), t \geq 0\}$.

b) Geef een stelsel vergelijkingen waarmee de limietkansen van de continue-tijd Markov keten kunnen worden uitgerekend.

De limietkansen op de verschillende toestanden zijn (**deze kansen behoeft u niet af te leiden!!**):

$$p_0 = 0.118, \; p_1 = 0.147, \; p_2 = 0.185, \; p_3 = 0.217, \; p_4 = 0.229, \; p_5 = 0.104.$$

c) Stel dat op een gegeven moment alle onderdelen werken. Hoeveel werkdagen duurt het dan gemiddeld totdat er voor het eerst 2 of meer onderdelen kapot zijn?

d) Wat is het verwachte aantal onderdelen dat per week door de reparateurs gerepareerd wordt?

e) Wat is de gemiddelde verblijftijd (wachttijd + reparatietijd) van een onderdeel bij de reparateurs?

3. Bij een enkele bediende arriveren klanten volgens een Poisson proces met een intensiteit van 8 klanten per uur. Klanten die arriveren als er al 5 andere klanten in het systeem zijn verlaten

het systeem onmiddellijk (zonder bediend te worden). De bedieningstijden van klanten zijn exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 10 minuten. Klanten worden in volgorde van aankomst bediende. Gedurende periodes dat er 3 of meer klanten in het systeem zijn is de klant die achteraan in de wachtrij staat ongeduldig. Het vertrekproces van ongeduldige klanten gedurende deze periodes kan gemodelleerd worden door een Poisson proces met een intensiteit van 4 klanten per uur (ook deze klanten verlaten het systeem dus zonder bediend te worden).

a) Bepaal de limietverdeling van het aantal klanten in het systeem.

b) Welk deel van de klanten wordt op den lange duur bediend, welk deel van de klanten verlaat het systeem direct bij aankomst zonder bediend te worden, en welk deel van de klanten verlaat het systeem later zonder bediend te worden?

4. Beschouw een produktiesysteem met vier werkstations S_1, S_2, S_3 en S_4. In alle vier de werkstations staat één machine waarop jobs bewerkingen ondergaan. Nieuwe jobs arriveren bij het produktiesysteem volgens een Poisson proces met een intensiteit van 6 jobs per uur. De helft van deze jobs ondergaat zijn eerste produktiestap in werkstation S_1, de andere helft ondergaat zijn eerste produktiestap in werkstation S_2. Na een produktiestap in S_1 worden jobs doorgestuurd naar S_2. Na een produktiestap in S_2 worden jobs doorgestuurd naar S_3. Na een produktiestap in S_3 (voor het eerst of herhaald) wordt een job teruggestuurd naar S_3 met kans $1/2$ en de job wordt doorgestuurd naar S_4 met kans $1/2$. Na een produktiestap in S_4 verlaten jobs het systeem.

De bewerkingstijden van een job in de stations zijn stochastisch, onderling onafhankelijk en exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van respectievelijk 15 minuten bij S_1, 9 minuten bij S_2, 4 minuten bij S_3 en 7 minuten bij S_4.
De toestand van het open netwerk wordt vastgelegd door (k_1, k_2, k_3, k_4), waarin k_i voor $i = 1, 2, 3, 4$ het aantal jobs in werkstation S_i is.

a) Wat is de limietkans $p(k_1, k_2, k_3, k_4)$ op k_1 jobs in S_1, k_2 jobs in S_2, k_3 jobs in S_3 en k_4 jobs in S_4 voor een willekeurige toestand (k_1, k_2, k_3, k_4) in de toestandsruimte?

b) Wat is de totale verwachte verblijftijd in het produktiesysteem van een willekeurige job?

c) Wat is de totale verwachte verblijftijd in het produktiesysteem van een job, die zijn eerste produktiestap in werkstation S_1 heeft? En wat is de totale verwachte verblijftijd in het produktiesysteem van een job, die zijn eerste produktiestap in werkstation S_2 heeft?

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	3a	b	4a	b	c
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2