TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21) op dinsdag 26 januari 2010, 14.00 – 17.00 uur. Het eindcijfer van de toets van 30 november 2009 kan ingezet worden ter vervanging van het cijfer voor som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

1. Een knooppunt (=switch) in een communicatienetwerk heeft 5 inkomende kanalen en 3 uitgaande kanalen. Per tijdslot kan er over alle drie de uitgaande kanalen 1 pakket verstuurd worden. Over een inkomend kanaal arriveert er ieder tijdslot, onafhankelijk van elkaar en onafhankelijk van wat er in voorgaande tijdsloten gebeurd is, met kans 1/2 een pakket. Een pakket dat in een bepaald tijdslot bij de switch arriveert kan pas in het volgende tijdslot over een uitgaand kanaal verstuurd worden. In de switch is een buffer geplaatst waarin maximaal 5 pakketten tegelijkertijd opgeslagen kunnen worden. Pakketten die niet opgeslagen kunnen worden omdat de buffer vol is gaan verloren.

   Laat X_n het aantal pakketten zijn dat in de buffer ligt aan het begin van tijdslot n. Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 \\ 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 \\ 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 \\ 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 \\ 0 & 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 6/32 \\ 0 & 0 & 1/32 & 5/32 & 10/32 & 16/32 \end{pmatrix}.$$

   a) - Leg de kansen in de laatste rij van de overgangsmatrix uit.
      - Leg uit waarom de eerste 4 rijen van de overgangsmatrix identiek zijn.

   De limietkansen van het aantal pakketten in de buffer zijn (**deze kansen behoeft u niet af te leiden!!**):

$$\pi_0 = 0.0210, \quad \pi_1 = 0.1116, \quad \pi_2 = 0.2464, \quad \pi_3 = 0.2938, \quad \pi_4 = 0.2074, \quad \pi_5 = 0.1198.$$

   b) Hoeveel pakketten zullen er op de lange termijn gemiddeld per tijdslot over de uitgaande kanalen verstuurd worden?

   c) Welk deel van de pakketten zal op de lange termijn verloren gaan?

   d) Wat is het gemiddeld aantal tijdsloten dat een pakket, dat over een uitgaand kanaal verstuurd wordt, in de buffer zit?

   e) Stel dat pakketten die in een bepaald tijdslot over een inkomend kanaal arriveren al in datzelfde tijdslot over een uitgaand kanaal verstuurd kunnen worden. Laat Y_n het aantal pakketten zijn dat in de buffer ligt aan het begin van tijdslot n in deze nieuwe situatie. Het stochastische proces $\{Y_n : n \geq 0\}$ is wederom een discrete-tijd Markov keten. Geef de toestandsruimte en overgangsmatrix van deze nieuwe Markov keten.

2. Bij een klein benzinestation is er maar 1 pomp. Auto's arriveren bij het benzinestation volgens een Poisson proces met een intensiteit van 20 auto's per uur. Wanneer een auto bij aankomst n (waarbij $n = 0, 1, 2, 3, 4$) andere auto's aantreft, zal de auto met kans $n/4$ het benzinestation direct weer verlaten en met kans $1 - n/4$ ook werkelijk benzine gaan tanken. Dus hoe drukker het bij het benzinestation is, des te groter de kans dat een auto het benzinestation direct weer verlaat. Auto's worden in volgorde van aankomst bediend. De bedieningstijd bij het benzinestation (= tijd om te tanken + te betalen) is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 3 minuten.

   a) Laat zien dat de limietverdeling van het aantal auto's bij het benzinestation gelijk is aan
   $$p_0 = \frac{32}{103}, \quad p_1 = \frac{32}{103}, \quad p_2 = \frac{24}{103}, \quad p_3 = \frac{12}{103}, \quad p_4 = \frac{3}{103}.$$
   b) Wat is op de lange termijn de fractie van het aantal auto's dat direct het benzinestation weer verlaat?
   c) Wat is de gemiddelde verblijftijd (= wachttijd + bedieningstijd) van een auto die ook werkelijk gaat tanken bij het benzinestation?
   d) Wat is de gemiddelde verblijftijd van een willekeurige auto die arriveert bij het benzinestation (dus inclusief degenen die direct het benzinestation weer verlaten)?
   e) Hoe lang duurt gemiddeld een periode dat er 2 of meer auto's bij het benzinestation zijn?

3. Bij een bediende arriveren klanten volgens een Poisson proces met een intensiteit van 20 klanten per uur. Drie kwart van de klanten komt met een relatief eenvoudige vraag. De tijd die de bediende nodig heeft om zo'n eenvoudige vraag af te handelen is (continu) uniform verdeeld tussen 1 en 3 minuten. Het resterende kwart van de klanten komt met een relatief lastige vraag. De tijd die de bediende nodig heeft om zo'n lastige vraag af te handelen is (continu) uniform verdeeld tussen 3 en x minuten, met $x > 3$.

   a) Aan welke voorwaarde moet x voldoen om een stabiele situatie bij de bediende te krijgen?
   b) Bereken, in het geval $x = 5$, de gemiddelde verblijftijd (= wachttijd + bedieningstijd) van een klant bij de bediende.

4. Een machine bevat vier onderdelen die parallel werken en, onafhankelijk van elkaar, exponentiëel verdeelde levensduren hebben met een gemiddelde van 4 maanden. De machine blijft doorwerken zolang nog niet alle onderdelen stuk zijn. Pas als alle vier de onderdelen stuk zijn valt de machine stil. Op dat moment vindt een correctieve vervanging van de vier onderdelen plaats. De tijd die zo'n vervanging vergt is verwaarloosbaar klein. De kosten van een vervanging zijn 1250 euro.

   a) Laat zien dat de lange-termijn gemiddelde vervangingskosten 1800 euro per jaar zijn.
   b) Wat is de kans dat na een half jaar nog geen vervanging heeft plaatsgevonden?

   Men overweegt om kapotte onderdelen al te vervangen op het moment dat drie van de vier onderdelen stuk zijn. De kosten van een vervanging lopen hierdoor terug van 1250 naar 780 euro.

   c) Wat zijn de lange-termijn gemiddelde vervangingskosten per jaar in de nieuwe situatie?

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	3a	b	4a	b	c
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2