

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD27) op donderdag 20 januari 2011, 09.00 – 12.00 uur.
Het eindcijfer van de toets van 21 september 2010 kan ingezet worden ter vervanging van som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

1. In een bepaalde functie in een bedrijf kunnen werknemers zich in vier verschillende salarisschalen bevinden, genummerd 1, 2, 3 en 4. De ontwikkeling van de werknemers in deze functie binnen het bedrijf in opeenvolgende jaren kan beschreven worden met behulp van een discrete-tijd Markov keten met 5 toestanden en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hierbij corresponderen de toestanden 1, 2, 3 en 4 met de vier verschillende salarisschalen en toestand 5 correspondeert met de toestand waarbij de persoon het bedrijf verlaten heeft.

- Wat is het verwachte totaal aantal jaren dat een werknemer, startend in salarisschaal 1, in het bedrijf zal doorbrengen?
 - Wat is de kans dat een werknemer, startend in salarisschaal 1, gedurende zijn verblijf bij het bedrijf ooit salarisschaal 3 zal bereiken?
 - Wat is het verwachte aantal jaren dat een werknemer, startend in salarisschaal 1, zich respectievelijk in de vier verschillende salarisschalen zal bevinden gedurende zijn verblijf bij het bedrijf?
 - Het bedrijf start met 20 werknemers in salarisschaal 1, 15 werknemers in salarisschaal 2, 10 werknemers in salarisschaal 3 en 5 werknemers in salarisschaal 4. Verder trekt het bedrijf ieder jaar 8 nieuwe werknemers in salarisschaal 1 aan, 2 nieuwe werknemers in salarisschaal 2 en 1 nieuwe werknemer in salarisschaal 3. Wat is op de lange termijn het verwachte aantal werknemers in de vier verschillende salarisschalen bij het bedrijf?
 - Hoeveel werknemers verlaten op de lange termijn gemiddeld per jaar het bedrijf?
2. In een bedrijf staan 2 machines, A en B , die onafhankelijk van elkaar werken en zo nu en dan kapot gaan. De tijd die machine A onafgebroken werkt is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 4 dagen. De tijd die machine B onafgebroken werkt is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 2 dagen. Voor de reparatie van de machines is één reparateur beschikbaar. De reparateur kan maar aan één machine tegelijk werken. De reparatieduur van een machine is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 1 dag. Machines worden first come first served gerepareerd.
- Beschrijf de toestand van de machines in het bedrijf met behulp van een continue-tijd Markov keten. Geef intensiteitsmatrix of intensiteitendiagram. Let op: voor een gedetailleerde beschrijving van het systeem is een Markov keten met 5 toestanden noodzakelijk.

- b) Geef een stelsel vergelijkingen waarmee de limietkansen van de continue-tijd Markov keten kunnen worden uitgerekend.
- c) Stel dat op een gegeven moment beide machines werken. Hoeveel dagen duurt het dan gemiddeld totdat voor het eerst beide machines kapot zijn?

In de limietsituatie kan men laten zien dat (**deze kansen behoeft u niet af te leiden!!**):

$$\begin{aligned}
 P(\text{ beide machines werken }) &= \frac{1}{2}, \\
 P(\text{ machine A werkt, machine B is stuk }) &= \frac{1}{4}, \\
 P(\text{ machine B werkt, machine A is stuk }) &= \frac{1}{8}, \\
 P(\text{ beide machines zijn stuk }) &= \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

- d) Wat is het verwachte aantal machines dat per week door de reparateur gerepareerd wordt?
 - e) Wat is de gemiddelde verblijftijd (wachttijd + reparatietijd) van een machine bij de reparateur?
3. Bij een machine arriveren volgens een Poisson proces 5 jobs per uur. De produktietijd van de jobs is exact gelijk aan 10 minuten.
- a) Wat is de gemiddelde doorlooptijd (= wachttijd + bedieningstijd) van een job?
- Stel nu dat de bedieningstijd niet altijd exact gelijk is aan 10 minuten, maar dat voor een deel α van de jobs geldt dat de bedieningstijd 15 minuten is in plaats van 10 minuten.
- b) Voor welke waarden van α geldt dat het systeem stabiel is?
 - c) Neem nu aan dat $\alpha = 0.2$. Wat is de gemiddelde doorlooptijd van een job?
4. Een machine bevat twee onderdelen die onafhankelijke levensduren hebben. De levensduur van onderdeel A is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 1 jaar. De levensduur van onderdeel B is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 2 jaar. De machine kan gewoon doorwerken als één van de twee onderdelen stuk is. Pas als *beide* onderdelen stuk zijn valt de machine stil. Op zo'n moment vindt een vervanging van de machine plaats. De kosten van zo'n vervanging zijn 7000 euro.
- a) Bereken de lange-termijn gemiddelde kosten per jaar.

Onderdeel B is het meest belangrijke onderdeel van de machine. Wanneer dit onderdeel stukgaat wordt er een alarmsignaal gegeven. Men overweegt om in de toekomst de machine al te vervangen op het moment dat onderdeel B stuk is gegaan. De kosten van zo'n vervanging hangen af van de toestand van onderdeel A op dat moment. Als onderdeel A ook al stuk is op dat moment zijn de kosten net als voorheen 7000 euro. Echter, als onderdeel A op dat moment nog werkt zijn de kosten van de vervanging slechts 5000 euro.

- b) Wat zijn de lange-termijn gemiddelde kosten per jaar in deze nieuwe situatie?

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	3a	b	c	4a	b
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2