TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2DD27) op vrijdag 25 januari 2013, 09.00 – 12.00 uur. Het eindcijfer van de toets van 27 september 2012 kan ingezet worden ter vervanging van som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

---

1. In een bedrijf staan vijf identieke, storingsgevoelige machines die onafhankelijk van elkaar defect kunnen gaan. Een machine die aan het begin van week n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) werkt, kan met kans $1/2$ in de loop van die week stuk gaan. Het bedrijf heeft 3 reparateurs in dienst voor het doen van reparaties aan de machines. Elke reparateur kan in een week maar 1 machine repareren. Een machine die in de loop van week n stuk gaat wordt, als er een reparateur beschikbaar is, gedurende week $n + 1$ gerepareerd. De machine werkt dan weer aan het begin van week $n + 2$. Als er in een bepaalde week aan meer dan 3 machines tegelijk reparatiewerk verricht moet worden, zal een deel van dit reparatiewerk uitgesteld worden tot de volgende week. Het aantal werkende machines aan het begin van opeenvolgende weken is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/16 & 4/16 & 6/16 & 4/16 & 1/16 \\ 1/32 & 5/32 & 10/32 & 10/32 & 5/32 & 1/32 \end{pmatrix}.$$

   a) Leg de kansen in de derde rij van de overgangsmatrix uit.
   b) Stel dat op een gegeven moment aan het begin van de week alle machines werken. Hoeveel weken duurt het dan gemiddeld totdat voor het eerst aan het begin van een week minder dan 4 machines werken?
   c) Geef een volledig stelsel vergelijkingen waarmee de limietkansen van het aantal werkende machines berekend kunnen worden.

   De limietverdeling van het aantal werkende machines wordt gegeven door (**deze kansen behoeft u niet af te leiden!**):

   $$\pi_0 = 0.003, \quad \pi_1 = 0.038, \quad \pi_2 = 0.162, \quad \pi_3 = 0.355, \quad \pi_4 = 0.333, \quad \pi_5 = 0.109.$$

   d) Wat is op de lange termijn het verwachte aantal reparaties dat per week gedaan wordt en de bezettingsgraad van een willekeurige reparateur?
   e) Wat is op de lange termijn de kans dat een willekeurige machine aan het begin van de week werkt?

2. Een produktieproces van een bepaald type produkt bestaat uit 2 produktiestappen die in 2 verschillende werkstations uitgevoerd worden. Een produkt vergt eerst een exponentieel verdeelde bewerkingstijd met een gemiddelde van 6 minuten in werkstation 1 waar 1 machine bewerkingen uitvoert. Vervolgens vergt een produkt een exponentieel verdeelde bewerkingstijd met een gemiddelde van 12 minuten in werkstation 2 waar 2 machines parallel staan te werken.

   Tussen de 2 werkstations staat een buffer ter grootte 2 waarin produkten, na bewerking in werkstation 1, tijdelijk opgeslagen kunnen worden als beide machines in werkstation 2 bezet zijn. Als de machine in werkstation 1 een produkt afrondt terwijl de buffer vol is raakt deze machine geblokkeerd. Het afgeronde produkt blijft in de machine totdat er een plek in de buffer is. Als de machine in werkstation 1 vrijkomt zal er altijd onmiddellijk met de bewerking van een nieuw produkt op deze machine begonnen worden (we nemen aan dat er bij werkstation 1 altijd nieuwe produkten voorhanden zijn).

   Laat $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ de toestand van het produktieproces op tijdstip t zijn. Hierbij geeft $X_1(t)$ de toestand van de machine in werkstation 1 weer ($X_1(t) = w$ als de machine werkend aan een produkt is, $X_1(t) = b$ als de machine geblokkeerd is), $X_2(t)$ geeft het aantal produkten in de buffer tussen de werkstations weer en $X_3(t)$ geeft het aantal bezette machines in werkstation 2 weer. Het stochastische proces $\{X(t) : t \geq 0\}$ is een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte

   $$S = \{(w, 0, 0), (w, 0, 1), (w, 0, 2), (w, 1, 2), (w, 2, 2), (b, 2, 2)\}.$$

   a) Geef intensiteitenmatrix of intensiteitendiagram van de continue-tijd Markov keten, en geef een stelsel vergelijkingen waarmee de limietkansen van de continue-tijd Markov keten kunnen worden uitgerekend.

   De limietverdeling van de continue-tijd Markov keten wordt gegeven door (**deze kansen behoeft u niet af te leiden!**):

   $$p_{(w,0,0)} = \frac{1}{11},\ p_{(w,0,1)} = p_{(w,0,2)} = p_{(w,1,2)} = p_{(w,2,2)} = p_{(b,2,2)} = \frac{2}{11}.$$

   b) Wat is de doorzet van werkstation 1 en werkstation 2, respectievelijk (i.e., het verwachte aantal produkten dat op de lange termijn per uur in werkstation 1 en werkstation 2 bewerkt wordt)?

   c) Wat is de gemiddelde doorlooptijd van een produkt in het produktieproces (i.e., de tijd vanaf het moment dat de bewerking in werkstation 1 start tot aan het moment dat de bewerking in werkstation 2 is afgerond)?

   d) Welk percentage van de doorlooptijd bevindt een job zich in bewerking in werkstation 1, geblokkeerd op de machine in werkstation 1, in de buffer tussen de twee werkstations, respectievelijk in bewerking in werkstation 2?

   e) Hoe lang duurt gemiddeld een periode waarin de machine in werkstation 1 onafgebroken werkend (en dus niet geblokkeerd) is?

3. Bij een machine arriveren volgens een Poisson proces 5 jobs per uur. De bewerkingstijd bestaat uit 2 delen: een deel dat voor alle jobs hetzelfde is, en een deel dat voor alle jobs verschillend is. Als gevolg daarvan modelleren we de bewerkingstijd Y (in minuten) van een job door

$$Y = pY^{(1)} + (1-p)Y^{(2)},$$

met $Y^{(1)}$ een constante tijd van 10 minuten, $Y^{(2)}$ een exponentieel verdeelde tijd met een gemiddelde van 10 minuten en met $0 < p < 1$.

a) Laat zien dat voor het tweede moment van de bewerkingstijd geldt

$$s^2 := E(Y^2) = 100\left(2 - 2p + p^2\right).$$

b) Bereken de gemiddelde tijd W_q dat een job in de wachtrij staat uitgedrukt in de variabele p.

c) Voor welke waarde van p geldt dat de gemiddelde tijd dat een job in de wachtrij staat gelijk is aan 34 minuten?

4. Een machine bevat twee onderdelen die onafhankelijke levensduren hebben. De levensduur van onderdeel A is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 6 maanden. De levensduur van onderdeel B is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 4 maanden. De machine kan doorwerken als één van de twee onderdelen stuk is. Pas als *beide* onderdelen stuk zijn valt de machine stil. Op zo'n moment vindt een vervanging van de machine plaats. De kosten van een vervanging zijn 7600 euro. De tijd die een vervanging duurt is verwaarloosbaar.

a) Bereken de lange-termijn gemiddelde vervangingskosten per maand.

Men overweegt om in de toekomst de machine al te vervangen op het moment dat één van de twee onderdelen stuk is gegaan. De kosten van een vervanging zijn in dat geval slechts 4800 euro.

b) Bereken de lange-termijn gemiddelde vervangingskosten per maand in deze nieuwe situatie.

Als beide onderdelen werken produceert de machine 3800 produkten per maand. Als één van de twee onderdelen werkt, produceert de machine 1900 produkten per maand.

c) Bereken het gemiddeld aantal produkten dat op de lange-termijn per maand geproduceerd wordt in de 2 situaties die geschetst zijn bij vraag a) en bij vraag b).

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	3a	b	c	4a	b	c
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2