TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21) op vrijdag 16 april 2010, 14.00 – 17.00 uur. Het eindcijfer van de toets van 30 november 2009 kan ingezet worden ter vervanging van het cijfer voor som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

---

1. Beschouw een verkooppunt waar de voorraad van een bepaald produkt één keer per week op vrijdagmiddag na sluitingstijd wordt geïnspecteerd en waar de volgende bestelstrategie wordt gehanteerd: als de voorraad onder niveau s is gezakt, wordt een bestelling ter grootte Q geplaatst. We gaan in het vervolg uit van $s = 2$ en $Q = 3$. Het verkooppunt is in het weekeind gesloten en de bestelling wordt op maandagochtend voor de openingstijd geleverd.

   De vraag naar het produkt bij het verkooppunt in de opeenvolgende weken is onderling onafhankelijk met een gemiddelde van 2 produkten per week. Vraag die niet direct uit voorraad geleverd kan worden gaat verloren. Noteren we met D_n de vraag in week n, dan geldt voor alle n dat de kansverdeling van de stochastische variabele D_n voldoet aan:

$k \rightarrow$	0	1	2	3	4	5
$P(D_n = k)$	0.077	0.260	0.346	0.230	0.077	0.010

   Laat X_n het aantal produkten zijn dat op voorraad ligt aan het *eind* van week n. Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

   en overgangsmatrix $P = \begin{pmatrix} 0.317 & 0.346 & 0.260 & 0.077 & 0.000 \\ 0.087 & 0.230 & 0.346 & 0.260 & 0.077 \\ 0.663 & 0.260 & 0.077 & 0.000 & 0.000 \\ 0.317 & 0.346 & 0.260 & 0.077 & 0.000 \\ 0.087 & 0.230 & 0.346 & 0.260 & 0.077 \end{pmatrix}$.

   a) Leg uit waarom $p_{1,0}$ inderdaad gelijk is aan 0.087 en leg uit waarom de tweede en vijfde rij van de overgangsmatrix identiek zijn.

   b) Op een bepaald moment liggen er aan het eind van de week nog 3 produkten op voorraad. Bereken hoe lang het gemiddeld duurt tot er voor het eerst een bestelling geplaatst wordt.

   De limietkansen van het stochastisch proces $\{X_n : n \geq 0\}$ worden gegeven door

   $$\pi_0 = 0.329,\ \pi_1 = 0.289,\ \pi_2 = 0.242,\ \pi_3 = 0.116,\ \pi_4 = 0.024.$$

   c) Bereken het verwachte aantal bestellingen dat op de lange termijn per jaar geplaatst wordt.

   d) Bereken de verwachte vraag naar het produkt die op de lange termijn per jaar verloren gaat.

   e) Laat Y_n het aantal produkten zijn dat op voorraad ligt aan het *begin* van week n. Het stochastische proces $\{Y_n : n \geq 0\}$ is ook een discrete-tijd Markov keten. Geef de toestandsruimte en overgangsmatrix van deze Markov keten.

2. Op een machine wordt een bepaald type produkt op order geproduceerd. Orders arriveren volgens een Poisson proces met een intensiteit van 4 orders per uur (1 order = 1 produkt). De produktie vindt plaats in batches en er kunnen maximaal 2 produkten tegelijk in een batch geproduceerd worden.

   Men hanteert de volgende produktiestrategie:

   - als er 2 of meer nieuwe orders staan te wachten op het moment dat de produktie van een batch is afgerond, wordt onmiddellijk gestart met de produktie van een nieuwe batch van 2 produkten.
   - als er 1 nieuwe order staat te wachten op het moment dat de produktie van een batch is afgerond, wordt onmiddellijk gestart met de produktie van een nieuwe batch van 1 produkt.
   - als er *geen* nieuwe orders staan te wachten op het moment dat de produktie van een batch is afgerond, start men met de produktie van een nieuwe batch zodra er een nieuwe order arriveert. In dit geval zal er dus ook altijd maar 1 produkt in de nieuwe batch geproduceerd worden.

   De produktietijd van een batch is stochastisch en exponentiëel verdeeld met een gemiddelde duur van 20 minuten. Verder geldt dat de produktietijd van een batch niet afhangt van het aantal produkten in de batch. Orders die arriveren als er al 4 wachtende orders in het systeem zijn gaan verloren. Onder wachtende orders verstaan we hier orders die niet horen bij produkten die in de batch zitten waarvan de produktie reeds gestart is.

   De toestand van het systeem wordt beschreven door een continue-tijd Markov keten. Hierbij wordt enerzijds aangegeven hoeveel wachtende orders er in het systeem zijn en anderzijds wordt aangegeven of de machine wel of geen batch aan het produceren is. In het vervolg geven we met toestand $(n, +)$, respectievelijk $(n, -)$, aan dat er n wachtende orders in het systeem zijn en dat de machine wel, respectievelijk niet, een batch aan het produceren is.

   a) Geef het overgang-intensiteiten diagram van de continue-tijd Markov keten.

   De limietkansen op de toestanden zijn (**deze kansen behoeft u niet af te leiden!!**):

$$p(0,-) = 0.192,\ p(0,+) = 0.256,\ p(1,+) = 0.185,$$

$$p(2,+) = 0.157,\ p(3,+) = 0.090,\ p(4,+) = 0.120.$$

   b) Welk deel van de orders gaat op de lange termijn verloren?

   c) Hoeveel batches worden er op de lange termijn gemiddeld per dag (=24 uur) geproduceerd?

   d) Hoeveel produkten zitten er op de lange termijn gemiddeld in een batch?

   In de toekomst wil men alleen nog maar batches van 2 produkten produceren. Dit impliceert dat als er 0 of 1 nieuwe order staat te wachten op het moment dat de produktie van een batch is afgerond, men wacht met het produceren van een nieuwe batch tot er 2 orders aanwezig zijn.

   e) Beschrijf deze nieuwe situatie met behulp van een continue-tijd Markov keten. Geef toestandsruimte en overgang-intensiteiten diagram.

3. Bij een bediende arriveren klanten volgens een Poisson proces met een intensiteit van 4 klanten per uur. Klanten die arriveren wanneer er al 4 andere klanten in het systeem zijn verlaten het systeem onmiddellijk (zonder bediend te worden). De bedieningstijd van een klant is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 15 minuten. De klanten worden bediend in volgorde van aankomst. Klanten die in de derde en vierde positie van de rij staan, als die er al zijn, zijn ongeduldig. Klanten in de derde positie verlaten de rij (zonder bediend te zijn) volgens een Poisson proces met een intensiteit van 2 klanten per uur. Klanten in de vierde positie verlaten de rij (zonder bediend te zijn) volgens een Poisson proces met een intensiteit van 4 klanten per uur.

   a) Bepaal de limietverdeling van het aantal klanten in het systeem.
   b) Bepaal de verwachte tijd dat een klant, bediend of niet bediend, in het systeem aanwezig is.
   c) Geef duidelijk aan hoe de gemiddelde busy period, i.e., de tijd dat de bediende onafgebroken klanten aan het bedienen is, kan worden uitgerekend. (**U hoeft de gemiddelde busy period niet expliciet uit te rekenen!**)

4. De levensduur (in jaren) van een machine heeft een kansdichtheid die gegeven wordt door

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 1 - \frac{1}{4}t, & 2 < t \leq 4, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

   De machine wordt direct vervangen door een nieuwe als hij stuk gegaan is. De kosten van zo'n correctieve vervanging van de machine zijn 2000 euro.

   a) Wat zijn de lange-termijn gemiddelde kosten per jaar als er alleen correctieve vervangingen gedaan worden?

   Men overweegt om, naast de correctieve vervangingen, ook preventieve vervangingen te doen als een machine 2 jaar oud is en nog niet stuk gegaan is. De kosten van zo'n preventieve vervanging zijn 1000 euro.

   b) Wat zijn de lange-termijn gemiddelde kosten per jaar in deze nieuwe situatie?

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	3a	b	c	4a	b
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2