TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2DD27) op woensdag 9 november 2011, 14.00 – 17.00 uur. Het eindcijfer van de toets van 27 september 2011 kan ingezet worden ter vervanging van som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

---

1. Het gedrag van een stochastisch systeem wordt beschreven door een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, en met overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Op tijdstip 0 bevindt de Markov keten zich met kans 1 in toestand 1.

a) Bepaal de eindklassen en de doorgangstoestanden.

b) Bereken de kans dat het systeem zich op tijdstip 5 in toestand 5 bevindt.

c) Bereken de verwachte tijd dat het systeem zich in de doorgangstoestanden bevindt.

d) Bereken de kans dat het systeem *nooit* in toestand 4 komt.

e) Bepaal de limietverdeling $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ \ldots \ , \pi_7)$.

2. Voor het produceren van een bepaald type produkt zijn twee machines beschikbaar, een snelle en een langzame. Het produkt wordt op order geproduceerd (1 order = 1 produkt). Orders die arriveren op het moment dat beide machines vrij zijn worden natuurlijk altijd toegewezen aan de snelle machine. Echter, als er meerdere orders tegelijk geproduceerd moeten worden wordt ook de langzame machine voor de produktie ingezet. Een produktie die eenmaal op de langzame machine gestart is, kan later niet worden afgebroken om op de snelle machine voortgezet te worden.

   De produktietijd van een order is op de snelle machine exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 30 minuten, en op de langzame machine exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 60 minuten. Het aankomstproces van orders is een Poissonproces met een intensiteit van 2 orders per uur. Als er bij aankomst van een order al 3 andere orders in het systeem zijn, dan gaat de order verloren.

   De toestand van het systeem wordt beschreven door een continue-tijd Markov keten. Hierbij wordt enerzijds aangegeven hoeveel orders er in het systeem zijn. Anderzijds wordt aangegeven, in het geval er precies 1 order in het systeem is, of de order op de snelle dan wel de langzame machine geproduceerd wordt.

   a) Geef de intensiteitenmatrix of het overgang-intensiteiten diagram van de continue-tijd Markov keten en geef een stelsel vergelijkingen waarmee de limietkansen op de mogelijke toestanden uitgerekend kunnen worden. De limietkansen op de toestanden zijn (deze kansen behoeft u niet af te leiden!!):

   $$p_0 = \frac{7}{26},\ p_1^{fast} = \frac{5}{26},\ p_1^{slow} = \frac{4}{26},\ p_2 = \frac{6}{26},\ p_3 = \frac{4}{26}.$$

   Hierbij geeft p_1^{fast} (respectievelijk p_1^{slow}) de limietkans weer dat er 1 order in het systeem is die op de snelle (respectievelijk de langzame) machine geproduceerd wordt.

   b) Bereken de bezettingsgraad van de langzame en de snelle machine.

   c) Welk deel van de orders gaat verloren, welk deel wordt op de snelle machine geproduceerd en welk deel op de langzame?

   d) Bereken de gemiddelde tijd dat een order, die op een van de twee machines geproduceerd wordt, in het systeem is.

3. De totale levensduur van een machine is Erlang verdeeld met parameters $k = 3$ en $\lambda = 1/6$ per dag. Tijdens de levensduur bevindt de machine zich achtereenvolgens in 3 verschillende toestanden: goed, redelijk en slecht. Eerst zit de machine een exponentieel verdeelde tijd met een gemiddelde van 6 dagen in de toestand goed. Vervolgens zit de machine een exponentieel verdeelde tijd met een gemiddelde van 6 dagen in de toestand redelijk. Tenslotte zit de machine een exponentieel verdeelde tijd met een gemiddelde van 6 dagen in de toestand slecht. De opbrengst van de machine is 2000 euro per dag als hij in toestand goed zit, 1500 euro per dag als hij in toestand redelijk zit en 1000 euro per dag als hij in toestand slecht zit.

   Als de levensduur van de machine voorbij is wordt de machine gerepareerd. De reparatie van de machine is een ingewikkelde klus en bestaat uit 2 delen. Het eerste deel van de reparatie vergt een exponentieel verdeelde tijd met een gemiddelde van 2 dagen. Bij dit eerste deel zijn de reparatiekosten 420 euro per dag. Het tweede deel van de reparatie vergt een exponentieel verdeelde tijd met een gemiddelde van 1 dag. Bij dit tweede deel zijn de reparatiekosten 630 euro per dag. Na een reparatie is de machine weer net zo goed als een nieuwe machine.

   a) Beschrijf de toestand van de machine met behulp van een continue-tijd Markov keten. Geef intensiteitenmatrix of overgang-intensiteiten diagram.

   b) Bereken de limietverdeling van de continue-tijd Markov keten en de lange-termijn gemiddelde winst (= opbrengst - kosten) per dag.

   Men overweegt de machine al te repareren op het moment dat hij van toestand redelijk naar toestand slecht overgaat en niet te wachten tot het einde van zijn levensduur. Neem aan dat reparatietijd en reparatiekosten door deze maatregel niet veranderen.

   c) Bereken de lange-termijn gemiddelde winst per dag in de nieuwe situatie.

4. Beschouw een produktiesysteem met drie werkstations S_1, S_2 en S_3. In alle drie de werkstations staat één machine waarop jobs bewerkingen ondergaan. Nieuwe jobs komen aan bij S_1 en ondergaan daar de eerste bewerking. Na een bewerking op S_1 (voor het eerst of herhaald) wordt een job doorgestuurd naar S_2. Na een bewerking op S_2 (voor het eerst of herhaald) wordt een job doorgestuurd naar S_3. Na een bewerking op S_3 (voor het eerst of herhaald) wordt 1/4 van de jobs weer teruggestuurd naar S_1 om de bewerkingen op S_1, S_2 en S_3 opnieuw te ondergaan en verlaat 3/4 het produktiesysteem. De bewerkingstijden van een job op de stations zijn stochastisch, onderling onafhankelijk en exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van respectievelijk 80 minuten op S_1, 1 uur op station S_2 en 100 minuten op station S_3. Men wil de totale werklast in het produktiesysteem beheersen. Het totaal aantal jobs, dat op ieder moment in S_1, S_2 en S_3 samen aanwezig is, wordt constant gelijk aan 5 gehouden. Elke keer als een job bij S_3 het produktiesysteem verlaat, wordt bij S_1 een nieuwe job toegelaten; er liggen altijd nieuwe jobs op toelating te wachten. Door deze werklastbeheersing kan het produktiesysteem beschreven worden als een gesloten netwerk met 5 jobs (klanten) en drie stations S_1, S_2 en S_3.

a) Laat zien dat de limietkans $p(k_1, k_2, k_3)$ op k_1 jobs in S_1, k_2 jobs in S_2 en k_3 jobs in S_3 voor een willekeurige toestand (k_1, k_2, k_3) in de toestandsruimte geschreven kan worden als $p(k_1, k_2, k_3) = C \cdot 4^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3}$ met C een normeringsconstante.

De kans $p_3(k_3)$ dat er k_3 klanten in station S_3 zijn wordt gegeven door

k_3	0	1	2	3	4	5
$p_3(k_3)$	0.1416	0.1643	0.1840	0.1946	0.1840	0.1315

b) Wat is de gemiddelde tijd dat een job zich, wachtend of in bewerking, in station S_3 bevindt per keer dat station S_3 bezocht wordt?

Het produktiesysteem is, zoals hiervoor beschreven, in werkelijkheid een open systeem met de gegeven werklastbeheersing.

c) Bereken het gemiddeld aantal nieuwe jobs dat per uur in het produktiesysteem wordt toegelaten en bepaal de totale gemiddelde verblijftijd W_{tot} (uren) van een job in het produktiesysteem.

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	3a	b	c	4a	b	c
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2