TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2DD27) op dinsdag 6 november 2012, 09.00 – 12.00 uur. Het eindcijfer van de toets van 27 september 2012 kan ingezet worden ter vervanging van som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

---

1. In een oven worden produkten in batches van 2 bewerkt. De bewerkingstijd van een batch in de oven is exact 2 minuten. Bij de oven arriveert elke minuut met kans 3/4 een produkt. Zo gauw als er 2 produkten bij de oven zijn worden ze in de oven gezet en wordt hun bewerking in de oven gestart.

   De situatie bij de oven kan beschreven worden door een discrete-tijd Markov keten met 5 toestanden. De toestand (i, j) van de Markov keten geeft enerzijds het aantal wachtende produkten voor de oven weer (i), en anderzijds de resterende bewerkingstijd van de batch in de oven (j), aan het begin van een minuut. De mogelijke toestanden van de Markov keten zijn $(0, 0), (1, 0), (0, 2), (0, 1)$ en $(1, 1)$. Merk op dat in de toestanden $(0, 0)$ en $(1, 0)$ de oven de desbetreffende minuut geen bewerking zal uitvoeren, terwijl in de toestanden $(0, 2), (0, 1)$ en $(1, 1)$ dat wel het geval is.

   a) Geef de overgangsmatrix van de discrete-tijd Markov keten.

   b) Laat zien dat de limietverdeling van de discrete tijd Markov keten wordt gegeven door
   $$\pi_{(0,0)} = \tfrac{1}{32}, \quad \pi_{(1,0)} = \tfrac{7}{32}, \quad \pi_{(0,2)} = \tfrac{12}{32}, \quad \pi_{(0,1)} = \tfrac{3}{32}, \quad \pi_{(1,1)} = \tfrac{9}{32}.$$

   c) Bereken de doorzet van de oven (= het verwachte aantal produkten dat op de lange termijn per minuut uit de oven komt).

   d) Bereken het gemiddeld aantal produkten dat, op de lange termijn, in een willekeurige minuut in de oven zit.

   e) Hoelang duurt gemiddeld een periode dat de oven onafgebroken bezig is met het bewerken van produkten (zonder dat de oven tussendoor hoeft te wachten omdat er minder dan 2 produkten bij de oven staan)?

2. In een fabriek staan 3 machines die parallel werken. De levensduren van de machines zijn exponentieel verdeeld met gemiddelde 1. Er zijn twee reparateurs, één ervaren reparateur en één onervaren reparateur. De reparatietijden van een machine zijn ook exponentieel verdeeld. De gemiddelde reparatietijd van een reparatie door de ervaren reparateur is $1/4$, de gemiddelde reparatietijd van een reparatie door de onervaren reparateur is $1/2$. Als beide reparateurs onbezet zijn wanneer een machine stuk gaat, zal de ervaren reparateur de reparatie op zich nemen. Laat $\{X(t),\ t \geq 0\}$ het aantal werkende machines $(0, 1, 2, 3)$ op tijdstip t zijn en laat $\{I(t),\ t \geq 0\}$ de toestand van de reparateurs op tijdstip t zijn, waarbij

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{als beide reparateurs bezet zijn;} \\ 1 & \text{als alleen de ervaren reparateur bezet is;} \\ 2 & \text{als alleen de onervaren reparateur bezet is;} \\ 3 & \text{als beide reparateurs vrij zijn.} \end{cases}$$

Het stochastisch proces $\{(X(t); I(t)),\ t \geq 0\}$ is een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{(3;3),\ (2;1),\ (2;2),\ (1;0),\ (0;0)\}$.

a) Geef intensiteitenmatrix of intensiteitendiagram van de continue-tijd Markov keten $\{(X(t); I(t),\ t \geq 0\}$.

b) Bepaal de limietkansen van de continue-tijd Markov keten.

c) Bepaal de bezettingsgraad van, respectievelijk, de ervaren en de onervaren reparateur.

d) Bepaal het aantal reparaties dat op de lange termijn per tijdseenheid door de reparateurs gedaan wordt.

e) Bepaal de gemiddelde duur van een periode waarin onafgebroken beide reparateurs bezet zijn.

3. Bij een machine arriveren volgens een Poisson proces λ jobs per uur. De kansdichtheid van de produktietijd (in minuten) van een job wordt gegeven door

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{als } 0 \leq u \leq 1, \\ 2 - u, & \text{als } 1 \leq u \leq 2, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

a) Voor welke waarden van λ geldt dat het systeem stabiel is?

In het vervolg nemen we aan dat $\lambda = 50$.

b) Bereken de bezettingsgraad van de machine, de verwachte resterende produktietijd van de job bij de machine en het gemiddeld aantal jobs in het systeem.

4. Beschouw een produktiesysteem met drie werkstations S_1, S_2 en S_3. In alle drie de werkstations staat één machine waarop jobs bewerkingen ondergaan. Alle jobs gaan eerst (één of meerdere keren) naar werkstation S_1, vervolgens (één of meerdere keren) naar werkstation S_2 en tenslotte (één of meerdere keren) naar werkstation S_3. Na een bewerking op S_1 (voor het eerst of herhaald) moet een job met kans $1/2$ nogmaals naar S_1 en de job wordt met kans $1/2$ doorgestuurd naar S_2. Na een bewerking op S_2 (voor het eerst of herhaald) moet een job met kans $1/3$ nogmaals naar S_2 en de job wordt met kans $2/3$ doorgestuurd naar S_3. Na een bewerking op S_3 (voor het eerst of herhaald) moet een job met kans $1/4$ nogmaals naar S_3 en met kans $3/4$ verlaat de job het systeem omdat de produktie is afgerond.

   Men wil de totale werklast in het produktiesysteem beheersen. Het totaal aantal jobs, dat op ieder moment in S_1, S_2 en S_3 samen aanwezig is, wordt constant gelijk aan 4 gehouden. Elke keer als een job bij S_3 het produktiesysteem verlaat, wordt bij S_1 een nieuwe job toegelaten; er liggen altijd nieuwe jobs op toelating te wachten. Door deze werklastbeheersing kan het produktiesysteem beschreven worden als een gesloten netwerk met 4 jobs (klanten) en drie stations S_1, S_2 en S_3.

   Bewerkingstijden van jobs in de stations zijn stochastisch, onderling onafhankelijk en exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van respectievelijk 5 minuten bij S_1, 6 minuten en 40 seconden bij S_2 en 7 minuten en 30 seconden bij S_3. De toestand van het netwerk wordt vastgelegd door (k_1, k_2, k_3), waarin k_i voor $i = 1, 2, 3$ het aantal jobs in werkstation S_i is.

   a) Geef de 15 verschillende toestanden waarin het systeem zich kan bevinden en laat zien dat voor de limietkans $p(k_1, k_2, k_3)$ op k_1 jobs in S_1, k_2 jobs in S_2 en k_3 jobs in S_3 geldt dat $p(k_1, k_2, k_3) = 1/15$ voor een willekeurige toestand in de toestandsruimte.
   b) Bereken de doorzet van de werkstations S_1, S_2 respectievelijk S_3 (= het aantal bewerkingen per uur dat op de verschillende werkstations uitgevoerd wordt).
   c) Wat is de gemiddelde tijd dat een job zich, wachtend of in bewerking, in werkstation S_1, S_2 en S_3 bevindt per keer dat het werkstation bezocht wordt?

   Het produktiesysteem is, zoals hiervoor beschreven, in werkelijkheid een open systeem met de gegeven werklastbeheersing.

   d) Bereken het gemiddeld aantal nieuwe jobs dat per uur in het produktiesysteem wordt toegelaten en bepaal de totale gemiddelde verblijftijd W_{tot} (uren) van een job in het produktiesysteem.

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	3a	b	4a	b	c	d
2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	1	3	2	2	2	2