TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2DD27) op woensdag 30 oktober 2013, 14.00 – 17.00 uur. Het eindcijfer van de toets van september 2012 kan nog steeds ingezet worden ter vervanging van het cijfer voor som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

---

1. Een werkplaats voor preventief onderhoud aan treinen heeft de beschikking over 3 onderhoudsteams. De teams werken, afzonderlijk van elkaar, aan het onderhoud van treinen. Ieder reparatieteam kan maar aan 1 trein tegelijk werken. Evenzo kan aan iedere trein maar 1 reparatieteam tegelijk werken. De onderhoudsduren van treinen in de werkplaats zijn geometrisch verdeeld met parameter 1/3. Hierbij is als tijdseenheid een dag genomen. Dit wil dus zeggen dat het onderhoud aan een trein door een reparatieteam aan het eind van de dag met kans 1/3 afgerond wordt en met kans 2/3 de volgende dag nog voortgezet moet worden.

   Iedere nacht arriveert er in principe 1 nieuwe trein voor onderhoud bij de werkplaats. Er is echter maar plaats voor 4 treinen tegelijk in de werkplaats (er zijn maar 4 sporen, met ieder plaats voor 1 trein). Nieuwe treinen die ingepland staan voor onderhoud op een moment dat er al 4 andere treinen in de werkplaats zijn worden afgezegd en in een later stadium opnieuw ingeroosterd.

   Met X_n noteren we het aantal treinen in de werkplaats aan het begin van de n-de dag. Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 1\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$. De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{20}{27} \end{pmatrix}.$$

   a) Leg de kansen uit in de derde rij van de overgangsmatrix.

   b) Hoelang duurt het gemiddeld todat voor het eerst één of twee reparatieteams vrij zijn, als er aan het begin van een bepaalde dag 4 treinen voor onderhoud in de werkplaats zijn?

   De limietverdeling van de discrete tijd Markov keten wordt gegeven door:

$$\pi_1 = 0.0564, \quad \pi_2 = 0.2269, \quad \pi_3 = 0.3344, \quad \pi_4 = 0.3822.$$

   c) Neem aan dat de kosten, per onderhoudsteam dat aan het werk is, 1000 euro per dag zijn. Wat zijn de lange termijn verwachte kosten per dag?

d) Bereken de doorzet op de lange termijn van de werkplaats (i.e., het verwachte aantal treinen dat op de lange termijn per maand (= 30 dagen) een onderhoudsbeurt krijgt).

e) Stel dat er een onbeperkt aantal wachtplaatsen bij de werkplaats zou zijn en er dus nooit treinen afgezegd en later ingepland zouden moeten worden. Laat zien hoe in dit geval de situatie gemodelleerd kan worden door middel van een discrete-tijd Markov keten (geef toestandsruimte en overgangsmatrix in deze nieuwe situatie).

2. Bij een verkooppunt wordt een bepaald produkt op voorraad geproduceerd. Men hanteert de volgende produktiestrategie:

- start een produktierun zodra het aantal produkten op voorraad kleiner dan 5 is;
- beëindig de produktierun als het aantal produkten op voorraad weer gelijk aan 5 is.

De produktietijd van een produkt is exponentiëel verdeeld met een gemiddelde duur van 15 minuten. Klanten arriveren bij het verkooppunt volgens een Poissonproces met een intensiteit van 2 klanten per uur. Iedere klant wil 2 produkten hebben. Klanten die niet uit voorraad geleverd kunnen worden gaan verloren. Verder nemen we aan dat als er maar 1 produkt op voorraad ligt een klant dit ene produkt meeneemt en vervolgens het verkooppunt verlaat.

Met $X(t)$ geven we het aantal produkten aan dat op tijdstip t op voorraad ligt.

a) Geef het intensiteitendiagram van de continue-tijd Markov keten $\{X(t), t \geq 0\}$.

De limietkansen op de verschillende toestanden zijn:

$$p(0) = \frac{21}{135}, \quad p(1) = \frac{22}{135}, \quad p(2) = \frac{20}{135}, \quad p(3) = \frac{24}{135}, \quad p(4) = \frac{16}{135}, \quad p(5) = \frac{32}{135}.$$

b) Welk deel van de klanten verlaat het verkooppunt zonder produkten, met 1 produkt, respectievelijk met twee produkten?

c) Wat is het gemiddeld aantal produkten dat per uur geproduceerd wordt?

d) Wat is de gemiddelde tijd die een produkt op voorraad ligt?

e) Geef een stelsel vergelijkingen waarmee de gemiddelde duur van een produktierun berekend kan worden. Geef ook expliciet aan welke onbekende in dit stelsel vergelijkingen de gemiddelde produktierun voorstelt. (U hoeft het stelsel vergelijkingen **niet** op te lossen!)

3. Bij een machine arriveren volgens een Poisson proces λ jobs per uur. Op de machine worden jobs, één voor één, in volgorde van aankomst bewerkt. Er is een onbegrensde wachtrij voor de machine. De bewerking van een job op de machine bestaat uit de afronding van 3 taken, die *parallel* op de machine uitgevoerd kunnen worden. De tijd die iedere taak duurt is continu uniform verdeeld op het interval tussen 0 en 2 minuten. Deze tijden zijn onafhankelijk van elkaar. De bewerking van een job is klaar wanneer alle 3 de taken zijn afgerond. De totale bewerkingstijd van een job is dus het maximum van de tijden die de 3 afzonderlijke taken duren.

a) Laat zien dat de kansdichtheid van de totale bewerkingstijd (in minuten) van een job wordt gegeven door

$$f(u) = \begin{cases} \frac{3}{8}u^2, & \text{als } 0 \le u \le 2, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

b) Voor welke waarden van λ geldt dat het systeem stabiel is?

In het vervolg nemen we aan dat $\lambda = 30$.

c) Bereken de bezettingsgraad van de machine, de verwachte resterende bewerkingstijd van de job bij de machine en de gemiddelde doorlooptijd van een job bij de machine.

4. Beschouw een produktiesysteem met vier werkstations S_1, S_2, S_3 en S_4. In alle vier de werkstations staat één machine waarop jobs bewerkingen ondergaan. Nieuwe jobs arriveren bij het produktiesysteem volgens een Poisson proces met een intensiteit van 6 jobs per uur. De helft van deze jobs ondergaat zijn eerste produktiestap in werkstation S_1, de andere helft ondergaat zijn eerste produktiestap in werkstation S_2. Na een produktiestap in S_1 worden jobs doorgestuurd naar S_2. Na een produktiestap in S_2 (voor het eerst of herhaald) worden jobs doorgestuurd naar S_3. Na een produktiestap in S_3 (voor het eerst of herhaald) wordt een job teruggestuurd naar S_2 met kans 1/2 en de job wordt doorgestuurd naar S_4 met kans 1/2. Na een produktiestap in S_4 verlaten jobs het systeem.

   Bewerkingstijden van jobs in de stations zijn stochastisch, onderling onafhankelijk en exponentiëel verdeeld met een gemiddelde van respectievelijk 10 minuten bij S_1, 4 minuten bij S_2, 4 minuten bij S_3 en 6 minuten bij S_4. De toestand van het netwerk wordt vastgelegd door (k_1, k_2, k_3, k_4), waarin k_i voor $i = 1, 2, 3, 4$ het aantal jobs in werkstation S_i is.

   a) Is het netwerk stabiel? Motiveer uw antwoord.

   b) Wat is de limietkans $p(k_1, k_2, k_3, k_4)$ op k_1 jobs in S_1, k_2 jobs in S_2, k_3 jobs in S_3 en k_4 jobs in S_4 voor een willekeurige toestand (k_1, k_2, k_3, k_4) in de toestandsruimte?

   c) Wat is de verwachte verblijftijd in het produktiesysteem van een willekeurige job?

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	3a	b	c	4a	b	c
2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	1	2