TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21/2DD27) op dinsdag 2 november 2010, 09.00 – 12.00 uur. Het eindcijfer van de toets van dit jaar kan ingezet worden ter vervanging van het cijfer voor som 1 van dit tentamen. Het maximum van deze twee cijfers bepaalt het eindcijfer voor deze som.

---

1. Op een machine worden produkten op order geproduceerd (1 order = 1 produkt). De maximale produktiecapaciteit van de machine is twee produkten per dag. De machine produceert twee produkten per dag tenzij het aantal aanwezige orders aan het begin van een dag minder dan twee is. Als dat het geval is produceert de machine op die dag geen enkel produkt.

   Het aantal aanwezige orders aan het begin van dag n wordt genoteerd met X_n. Het aantal nieuwe orders dat arriveert gedurende dag n wordt genoteerd met Y_n. De stochastische variabelen Y_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ zijn onafhankelijk, identiek verdeeld. Voor alle n wordt de kansmassafunctie van de stochastische variabele Y_n gegeven door

$k \rightarrow$	0	1	2	3
$P(Y_n = k)$	0.10	0.25	0.30	0.35

   Orders die arriveren gedurende dag n kunnen op zijn vroegst gedurende dag $n+1$ geproduceerd worden. Om te voorkomen dat orders te lang moeten wachten voor zij geproduceerd kunnen worden, zullen er nooit meer dan 4 orders aanwezig zijn aan het begin van een dag. Orders die er voor zorgen dat het aantal aanwezige orders aan het begin van de volgende dag groter dan 4 zal zijn, gaan verloren.

   In het vervolg nemen we aan dat aan het begin van dag 1 er 2 orders aanwezig zijn, i.e.. $X_1 = 2$.

   De discrete-tijd Markov keten$\{X_n,\, n \geq 1\}$ heeft toestandsruimte $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 \\ 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0.25 & 0.65 \end{pmatrix}.$$

   a) Bereken de gezamenlijke kans dat op alle drie de eerste dagen (dag 1 *en* dag 2 *en* dag 3) het maximale aantal van 2 orders geproduceerd zal worden.

   b) Leg **duidelijk** uit hoe men het verwachte aantal dagen kan berekenen dat het duurt totdat er voor het eerst een dag is waarop er geen produkten geproduceerd worden (**het stelsel vergelijkingen hoeft niet expliciet opgelost te worden**).

De limietkansen van de discrete-tijd Markov keten $\{X_n,\, n \geq 1\}$ worden gegeven door

$$\pi_0 = 0.0226,\ \pi_1 = 0.0952,\ \pi_2 = 0.2032,\ \pi_3 = 0.2919,\ \pi_4 = 0.3871.$$

c) Wat is op de lange termijn het verwachte aantal produkten dat per dag geproduceerd wordt? En wat is op de lange termijn het deel van de orders dat verloren gaat?

d) Als de produktie van een order niet plaatsvindt op de dag onmiddellijk volgend op de dag dat de order arriveerde, moet het bedrijf de klant 100 euro boetekosten betalen per dag dat de produktie van de order is uitgesteld. Bereken de lange termijn verwachte boetekosten per dag voor het bedrijf.

e) Het bedrijf besluit in de toekomst alle orders te accepteren, zelfs als dat zal leiden tot meer dan 4 orders in het systeem en dus tot langere wachttijden. Laat $\tilde{X}_n$ het aantal orders in het systeem zijn aan het begin van dag n in deze nieuwe situatie. Het stochastische proces $\{\tilde{X}_n,\, n \geq 0\}$ is weer een discrete-tijd Markov keten. Geef toestandsruimte en overgangsmatrix van de nieuwe Markov keten.

2. Voor de produktie van een zeker type produkt, zijn er 3 machines beschikbaar: 2 snelle machines en 1 langzame. Het produkt wordt op order geproduceerd (1 order = 1 produkt). Orders die arriveren op het moment dat er een snelle machine vrij is, worden natuurlijk toegewezen aan een snelle machine. Echter, als op het moment dat een order arriveert beide snelle machines bezet zijn, dan wordt de order toegewezen aan de langzame machine. Wanneer een produktie gestart is op de langzame machine, zal die ook op deze machine afgemaakt worden (zelfs als ondertussen 1 van de snelle machines vrij gekomen is).

   De produktietijd van een order op de snelle machine is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 12 minuten. De produktietijd van een order op de langzame machine is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 15 minuten. Het aankomstproces van orders is een Poisson proces met een intensiteit van 10 orders per uur. Een order gaat verloren wanneer de order arriveert op een moment dat alle machines bezet zijn.

   De toestand van het systeem op tijdstip t kan beschreven worden door $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$. Hierbij is $X_1(t)$ het aantal bezette snelle en $X_2(t)$ het aantal bezette langzame machines.

   a) Geef intensiteitenmatrix of intensiteitendiagram van de continue-tijd Markov keten $X(t)$.

   De limietkansen van de continue-tijd Markov keten $X(t)$ worden gegeven door

   $$p_{0,0} = 0.147,\ p_{0,1} = 0.053,\ p_{1,0} = 0.252,\ p_{1,1} = 0.148,\ p_{2,0} = 0.172,\ p_{2,1} = 0.228.$$

   Hierbij is $p_{i,j}$ de limietkans dat er i snelle machines bezet zijn en j langzame machines (voor $i = 0, 1, 2$ en $j = 0, 1$).

   b) Bepaal de doorzet van het produktiesysteem.

   c) Bepaal de gemiddelde produktietijd van een order die niet verloren gaat.

   Neem aan dat in de toekomst een produktie die op de langzame machine gestart is op de snelle machine zal worden afgemaakt als gedurende de produktie een van de snelle machines vrijkomt.

d) Bepaal de limietkansen van de continue-tijd Markov keten $X(t)$ in deze nieuwe situatie.

e) Bepaal de doorzet van het produktiesysteem in deze nieuwe situatie.

f) Bepaal de gemiddelde produktietijd van een order die niet verloren gaat in deze nieuwe situatie.

3. In een orderverzamelcentrum bestaande uit 2 verdiepingen worden artikelen in grote kratten vervoerd. Met een lift worden de kratten van de bovenste verdieping naar de onderste verdieping gebracht. In de lift is maar plaats voor 1 krat tegelijk. De lift doet er exact 5 seconden over om een krat van de bovenste verdieping naar de onderste verdieping te brengen. Daarna doet hij er ook weer exact 5 seconden over om leeg naar de bovenste verdieping terug te keren. Het aankomstproces van kratten op de bovenste verdieping bij de lift kan gemodelleerd worden door een Poisson proces met een intensiteit van λ kratten per minuut.

   a) Voor welke waarden van λ geldt dat het systeem bij de lift stabiel is?

   In het vervolg nemen we aan dat $\lambda = 5$.

   b) Wat is het gemiddeld aantal wachtende kratten op de bovenste verdieping bij de lift?

   c) Wat is de gemiddelde doorlooptijd van een krat bij de lift (i.e., de tijd vanaf de aankomst van een krat bij de lift tot aan het moment dat de krat de lift verlaat)?

4. Een machine bevat één belangrijk onderdeel waarvan de levensduur continu, uniform verdeeld is tussen 0 en 1 jaar. In de machine zit ook een reserveonderdeel voor dit belangrijke onderdeel dat automatisch de rol van het belangrijke onderdeel overneemt op het moment dat het belangrijke onderdeel stuk gaat. De resterende levensduur van het reserveonderdeel (vanaf het moment dat het de rol van het belangrijke onderdeel overneemt tot aan het moment dat het zelf stuk gaat) is onafhankelijk van de levensduur van het originele onderdeel en ook continu, uniform verdeeld tussen 0 en 1 jaar. Op het moment dat beide onderdelen stuk zijn faalt de hele machine. De kansdichtheid van de tijd (in jaren) tot de machine faalt wordt gegeven door

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{als } 0 < u < 1, \\ 2 - u, & \text{als } 1 < u < 2, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

   a) Bereken de kans dat de machine na 1.5 jaar nog steeds niet is stuk gegaan.

   Op het moment dat de machine faalt wordt de machine onmiddellijk vervangen door een nieuwe. De kosten van zo'n correctieve vervanging van de machine zijn 3000 euro. Naast deze correctieve vervangingen van machines, zijn er ook preventieve vervangingen van machines gepland op het moment dat een machine een jaar lang onafgebroken werkt (zonder te zijn stuk gegaan). De kosten van zo'n preventieve vervanging zijn 2000 euro.

   b) Bereken de lange-termijn gemiddelde kosten per jaar.

Normering:

1a	b	c	d	e	2a	b	c	d	e	f	3a	b	c	4a	b
2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	2	2	2	2	2