TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Toets Stochastische OR (2DD18/2DD21) op vrijdag 10 november 2006, 10.30 – 12.30 uur.

1. Een produktieproces van een bepaald type produkt bestaat uit 3 produktiestappen die op 3 verschillende machines uitgevoerd worden. Een produkt vergt eerst een geometrisch verdeelde bewerkingstijd met parameter 2/3 op machine 1, vervolgens een geometrisch verdeelde bewerkingstijd met parameter 2/3 op machine 2 en tenslotte een geometrisch verdeelde bewerkingstijd met parameter 2/3 op machine 3. Hierbij is als tijdseenheid 1 minuut gekozen. Een produkt dat op een bepaalde machine in bewerking is zal dus iedere minuut met kans 2/3 zijn bewerking afronden en met kans 1/3 zijn bewerking voortzetten.

   Tussen de machines zijn geen buffers. Een machine kan dus alleen zijn produkt aan de volgende machine doorgeven, als deze volgende machine leeg is. Zo niet, dan raakt de machine geblokkeerd.

   Het doorschuiven van de produkten op de machines gebeurt synchroon, aan het eind van iedere minuut. Allereerst zal machine 3 een afgerond produkt doorschuiven (dit kan altijd aangezien er na machine 3 geen andere machine meer in het produktieproces zit). Vervolgens zal machine 2 een afgerond produkt naar machine 3 doorschuiven (dit kan alleen als machine 3 vrij is). Daarna zal machine 1 een afgerond produkt naar machine 2 doorschuiven (dit kan alleen als machine 2 vrij is). En tenslotte zal, als machine 1 vrijgekomen is, een nieuw produkt op machine 1 bewerkt worden (we nemen aan dat er bij machine 1 altijd nieuwe produkten voorhanden zijn).

   Laat $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, X_n^{(3)})$ de toestand van de produktielijn aan het begin van de $n-$de minuut zijn. Hierbij geeft $X_n^{(j)}$ de toestand van machine j weer, $j = 1, 2, 3$. In het vervolg zeggen we dat $X_n^{(j)} = w$ als machine j werkend aan een produkt is (w = working), $X_n^{(j)} = b$ als machine j geblokkeerd is (b = blocked) en $X_n^{(j)} = i$ als machine j vrij is (i = idle). Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte

$$S = \{(w,w,w),(w,b,w),(w,i,w),(w,w,i),(w,i,i),(b,w,w),(b,b,w),(b,w,i)\}$$

   en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{27} & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{2}{27} & 0 & \frac{2}{27} & \frac{4}{27} & \frac{4}{27} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   a) Leg uit waarom $p_{1,1} = \frac{9}{27}$, $p_{1,3} = \frac{4}{27}$ en $p_{1,4} = \frac{2}{27}$.

   b) Bereken de kans dat aan het begin van de vierde minuut machine 2 werkend, geblokkeerd, respectievelijk vrij is, als aan het begin van de eerste minuut alle 3 de machines werkend zijn.

c) Hoelang duurt het gemiddeld totdat machine 3 een minuut vrij is, als aan het begin van de eerste minuut alle 3 de machines werkend zijn?

d) Stel dat de produktiekosten van een werkende machine 10 euro per minuut zijn. Een geblokkeerde of vrije machine maakt geen produktiekosten. Wat zijn de totale verwachte produktiekosten in het eerste uur, als aan het begin van de eerste minuut alle 3 de machines werkend zijn?

e) Bereken de lange-termijn fractie van de tijd dat machine 2 werkend, geblokkeerd, respectievelijk vrij is.

f) Bereken de lange-termijn doorzet van machine 1, machine 2 respectievelijk machine 3 (i.e., het aantal produkten dat op de lange-termijn per uur op machine 1, machine 2 respectievelijk machine 3 geproduceerd wordt).

2. Gegeven zijn de Markov ketens $\{X_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, beginverdeling $(0, 0, 1, 0, 0)$ en overgangsmatrix

$$P_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en $\{Y_n : n \geq 0\}$ met toestandsruimte $S_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, beginverdeling $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ en overgangsmatrix

$$P_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geef voor beide Markov ketens aan of het een periodieke of aperiodieke Markov keten is. Leg in beide gevallen ook uit waarom de Markov keten periodiek/aperiodiek is.

b) Bepaal de limietverdelingen van beide Markov ketens, indien ze bestaan.

In het vervolg kijken we alleen nog maar naar de Markov keten $\{Y_n : n \geq 0\}$.

c) Bepaal de verwachte terugkeertijd van toestand 2, i.e., het verwachte aantal stappen dat nodig is om startend vanuit toestand 2 weer terug te keren naar toestand 2.

d) Per keer dat de Markov keten $\{Y_n : n \geq 0\}$ het pad $3 \to 2 \to 1 \to 3$ volgt moet 60 euro betaald worden. Per keer dat de Markov keten $\{Y_n : n \geq 0\}$ het pad $3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3$ volgt moet 120 euro betaald worden. Bereken de lange-termijn verwachte kosten per periode.

Normering:

Alle tien de onderdelen wegen even zwaar mee.