TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Toets Stochastische OR (2DD18/2DD21) op woensdag 31 oktober 2007, 13.30 – 15.15 uur.

1. In een produktiestation staan 2 machines, een snelle en een langzame, die parallel werken. Jobs die op de snelle machine geproduceerd worden vergen een geometrisch verdeelde bewerkingstijd met parameter 1/3. Hierbij is als tijdseenheid 1 minuut gekozen. Een job die op de snelle machine in bewerking is zal dus iedere minuut met kans 1/3 zijn bewerking afronden en met kans 2/3 zijn bewerking voortzetten. Jobs die op de langzame machine geproduceerd worden vergen een geometrisch verdeelde bewerkingstijd met parameter 1/4. Een job die op de langzame machine in bewerking is zal dus iedere minuut met kans 1/4 zijn bewerking afronden en met kans 3/4 zijn bewerking voortzetten. Jobs worden bij voorkeur op de snelle machine bewerkt. Als de snelle machine echter bezet is op het moment dat een job in bewerking kan gaan, wordt ook de langzame machine gebruikt. Als de bewerking van een job eenmaal op de langzame machine gestart is, zal hij op deze machine afgemaakt worden (ook als in een later stadium de snelle machine vrij komt).

   De tijden tussen 2 opeenvolgende aankomsten van jobs bij het produktiestation zijn geometrisch verdeeld met parameter 1/2. Elke minuut komt er dus met kans 1/2 wel een nieuwe job aan bij het produktiestation en met kans 1/2 niet. Jobs die aankomen terwijl er al vier andere jobs in het produktiestation zijn gaan verloren. We gaan er hierbij vanuit dat jobs die hun bewerking afronden in een minuut waarin ook een nieuwe job arriveert, het produkiestation al hebben verlaten op het moment dat de nieuwe job arriveert (in iedere minuut geldt dat eerst de eventuele vertrekken plaatsvinden en daarna de eventuele aankomsten).

   Met X_n geven we het aantal jobs in het produktiestation weer aan het begin van de n-de minuut. Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1^-, 1^+, 2, 3, 4\}$. Hierbij geeft 1^- de toestand weer met 1 job in het produktiestation die geproduceerd wordt op de langzame machine en 1^+ de toestand met 1 job in het produktiestation die geproduceerd wordt op de snelle machine. De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{17}{24} \end{pmatrix}.$$

   a) Leg de getallen in de vierde rij van de overgangsmatrix uit.

   b) Bereken het verwachte aantal produkten dat in het eerste uur op de 2 machines geproduceerd wordt, als er aan het begin van het uur geen jobs in het produktiestation zijn.

   c) Stel dat, als een machine aan het produceren is, de produktiekosten van de snelle en de langzame machine respectievelijk 50 euro en 40 euro per minuut zijn. Wat zijn de totale verwachte produktiekosten in het eerste uur, als er aan het begin van het uur geen jobs in het produktiestation zijn?

d) Hoelang duurt gemiddeld een periode waarin beide machines tegelijkertijd aan het produceren zijn?

e) Welk deel van de jobs gaat op den lange duur verloren omdat er al vier andere jobs in het produktiestation zijn?

f) Bereken de lange-termijn doorzet van de snelle, respectievelijk de langzame, machine (i.e., het aantal produkten dat op de lange-termijn per uur op de snelle respectievelijk de langzame machine geproduceerd wordt).

2. In een grote montagewerkplaats zit elke medewerker in één van de volgende drie rangen: leerlingmonteur, monteur, chefmonteur. Jaarlijks wordt de personeelssituatie bekeken. Het doorstroom- en vertrekgedrag van medewerkers wordt beschreven door onderstaande Markov keten. Toestanden: 1 = leerlingmonteur, 2 = monteur, 3 = chefmonteur, 4 = weg. De overgangsmatrix wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wat is de verwachte tijd die iemand, die als leerlingmonteur start, in de montagewerkplaats werkzaam is?

b) Wat is de kans dat iemand, die als leerlingmonteur start, ooit chefmonteur wordt?

c) Hoeveel medewerkers moet de directie per jaar in de toestanden 1,2 en 3 aantrekken, als gestreefd wordt op den lange duur naar een bezetting van 120, 60 en 30 medewerkers respectievelijk in de toestanden 1, 2 en 3?

d) Stel dat iedere vertrekkende medewerker onmiddellijk vervangen zou worden door een nieuwe medewerker die begint in de rang van leerlingmonteur. Hoeveel medewerkers zou het bedrijf dan op den lange duur in de verschillende rangen in dienst hebben, als men zou starten met 210 medewerkers?

Normering:

Alle tien de onderdelen wegen even zwaar mee.