

TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN  
Faculteit Wiskunde en Informatica

Toets Stochastische OR (2DD27) op donderdag 27 september 2012, 13.45 – 15.30 uur.

1. Op een bepaalde plaats wordt bijgehouden hoeveel neerslag er iedere dag valt. Als er meer dan 0.5 mm neerslag op een dag valt, wordt de dag regenachtig genoemd. Als er minder dan 0.5 mm neerslag op een dag valt, wordt de dag droog genoemd. Uit meetgegevens uit het verleden blijkt dat het weer op een dag op de volgende manier van het weer van de twee voorgaande dagen afhangt:
  - Als het gisteren regenachtig was en vandaag ook, dan is het morgen regenachtig met kans 0.7 en droog met kans 0.3;
  - Als het gisteren droog was en vandaag ook, dan is het morgen regenachtig met kans 0.2 en droog met kans 0.8;
  - Als het gisteren regenachtig was en vandaag droog, dan is het morgen regenachtig met kans 0.4 en droog met kans 0.6;
  - Als het gisteren droog was en vandaag regenachtig, dan is het morgen regenachtig met kans 0.5 en droog met kans 0.5.
- a) Modelleer de situatie als een discrete-tijd Markov keten. Geef toestandsruimte en overgangsmatrix.
- b) Als het op 29 september droog is en op 30 september regenachtig, wat is dan de kans dat het op 4 oktober regenachtig is?
- c) Als het op 29 september droog is en op 30 september regenachtig, wat is dan het verwachte aantal droge, respectievelijk regenachtige, dagen gedurende de eerste 2 weken van oktober?
- d) Wat is op de lange termijn het deel van de dagen dat het droog, respectievelijk regenachtig, is?
- e) Hoeveel dagen duurt gemiddeld een periode dat het onafgebroken droog, respectievelijk regenachtig, is?

2. Gegeven is een Markov keten met toestandsruimte  $S = \{1, 2, \dots, 8\}$  en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De kosten die je per periode maakt zijn in toestand 2 gelijk aan 10 euro, in toestand 5 gelijk aan 20 euro en in toestand 6 gelijk aan 30 euro. De kosten in alle overige toestanden zijn gelijk aan 0.

- Bepaal de doorgangstoestanden en de eindklassen van deze Markov keten. Geef van de eindklassen bovendien aan of ze periodiek of aperiodiek zijn.
- Wat is de verwachte tijd dat het systeem in de doorgangstoestanden verblijft bij start in toestand 2?
- Wat zijn de totale verwachte kosten, over een oneindige horizon, bij start in toestand 2?
- Wat zijn de lange-termijn verwachte kosten per periode bij start in toestand 2? Leg je antwoord uit.
- Bereken de kans dat bij start in toestand 2 de Markov keten ooit in toestand 2 terugkeert.

---

**Normering:**

Alle tien de onderdelen wegen even zwaar mee.