

Toets Stochastische OR (2DD18/2DD21) op donderdag 6 november 2008, 15.30 – 17.15 uur.

De uitwerkingen dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.

1. In een winkel zijn twee kassa's geopend waar klanten hun boodschappen kunnen afrekenen.

Het aantal klanten dat in de verschillende minuten bij de kassa's aankomt zijn onderling onafhankelijke stochastische variabelen met een gemiddelde van 0.72 klanten per minuut. Noteren we met D_n het aantal klanten dat aankomt in minuut n , dan geldt voor alle n dat de kansverdeling van de stochastische variabele D_n voldoet aan:

$k \rightarrow$	0	1	2	3
$P(D_n = k)$	0.48	0.36	0.12	0.04

De bedieningstijden van de klanten zijn geometrisch verdeeld met een gemiddelde van 2 minuten. Bij een kassa waar een klant in bediening is vertrekt er dus elke minuut met kans $1/2$ wel een klant en met kans $1/2$ niet. Aankomende klanten die er voor zorgen dat het totaal aantal klanten bij de kassa's groter dan 4 is, zijn ongeduldig en gaan verloren. We gaan er hierbij vanuit dat klanten die hun bediening afronden in een minuut waarin ook nieuwe klanten arriveren, de kassa's al hebben verlaten op het moment dat de nieuwe klanten arriveren (in iedere minuut geldt dat eerst de eventuele vertrekken plaatsvinden en daarna de eventuele aankomsten).

Met X_n geven we het aantal klanten bij de kassa's weer aan het begin van de n -de minuut. Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} 0.48 & 0.36 & 0.12 & 0.04 & 0 \\ 0.24 & 0.42 & 0.24 & 0.08 & 0.02 \\ 0.12 & 0.33 & 0.33 & 0.16 & 0.06 \\ 0 & 0.12 & 0.33 & 0.33 & 0.22 \\ 0 & 0 & 0.12 & 0.33 & 0.55 \end{pmatrix}.$$

- Leg de getallen in de derde rij van de overgangsmatrix uit.
- Bereken de bezettingsgraad van de kassa's in het eerste uur als er aan het begin van het uur geen klanten bij de kassa's zijn (i.e., welk deel van het uur zijn er naar verwachting 0, 1 respectievelijk 2 kassa's bezet)?
- Stel dat een klant gemiddeld voor 20 euro aan boodschappen doet in de winkel. Wat is de totale verwachte opbrengst in het eerste uur voor de winkel, als er aan het begin van het uur geen klanten bij de kassa's zijn?
- Hoelang duurt gemiddeld een periode dat er precies 1 klant bij de kassa's is?
- Welk deel van de klanten gaat op den lange duur verloren omdat ze er voor zorgen dat er meer dan 4 klanten bij de kassa's staan?

f) Stel dat er een kassa dicht gaat op het moment dat er nog maar 1 klant bij de kassa's staat en dat deze kassa pas weer open gaat als het totaal aantal klanten bij de kassa's weer gestegen is tot 3. Geef aan hoe deze nieuwe situatie beschreven kan worden met behulp van een discrete-tijd Markov keten (d.w.z., geef toestandsruimte en overgangsmatrix van deze nieuwe Markov keten).

2. Een vak bestaat uit 2 onderdelen, onderdeel A en onderdeel B. Voor beide onderdelen bestaat een apart deeltentamen. Een student moet eerst het deeltentamen van onderdeel A succesvol hebben afgerond voor hij/zij aan het deeltentamen van onderdeel B mag deelnemen.

Zowel voor het deeltentamen van onderdeel A als het deeltentamen van onderdeel B geldt het volgende:

- Bij de eerste poging slaagt 60% van de studenten, 30% van de studenten waagt een tweede poging en 10% besluit met het vak te stoppen;
 - Bij iedere volgende poging slaagt 50% van de studenten, waagt 25% van de studenten een volgende poging en besluit 25% van de studenten met het vak te stoppen.
- a) Modelleer het verloop van een willekeurige student bij het vak met een discrete-tijd Markov keten (geef toestandsruimte en overgangsmatrix).
- b) Wat is de kans dat een willekeurige student het vak uiteindelijk succesvol afrondt?
- c) Wat is de kans dat een willekeurige student onderdeel A van het vak WEL succesvol afrondt maar onderdeel B van het vak NIET?
- d) Wat is het verwachte aantal keren dat een willekeurige student een deeltentamen van het vak doet? Hoeveel keer doet hij/zij naar verwachting het deeltentamen van onderdeel A? En hoeveel keer doet hij/zij naar verwachting het deeltentamen van onderdeel B?

Normering:

Alle tien de onderdelen wegen even zwaar mee.