TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Toets Stochastische OR (2YD18/2DD21) op maandag 30 november 2009, 10.45 – 12.30 uur.

---

1. Op een machine wordt een bepaald type produkt op order geproduceerd. De machine is storingsgevoelig. Als gevolg daarvan is de machine afwisselend in werking en in reparatie. De tijd die de machine onafgebroken werkt is geometrisch verdeeld met parameter $1/4$. Hierbij is de tijdseenheid gekozen als 1 uur. Bovenstaande impliceert dat, wanneer de machine het huidige uur in werking is, de machine het volgende uur in reparatie is met kans $1/4$ (en de machine is het volgende uur nog steeds in werking met kans $3/4$). De reparatietijd van de machine is geometrisch verdeeld met parameter $2/3$. Dit impliceert dat, wanneer de machine het huidige uur in reparatie is, de machine het volgende uur in werking is met kans $2/3$ (en de machine is het volgende uur nog steeds in reparatie met kans $1/3$).

   De produktietijd van een produkt is geometrisch verdeeld met parameter $4/5$. Dit betekent dat, gedurende periodes dat de machine in werking is en er orders in het systeem zijn, aan het eind van ieder uur de produktie van een produkt wordt afgerond met kans $4/5$ en geen produktie wordt afgerond met kans $1/5$. Natuurlijk worden gedurende periodes dat er geen orders in het systeem zijn of de machine in reparatie is geen produkties afgerond.

   Aan het eind van ieder uur, onafhankelijk van alle voorgaande uren, arriveert er een order voor één nieuwe produkt met kans $1/2$ en er arriveert geen order ook met kans $1/2$. Orders die leiden tot een situatie met meer dan 3 orders tegelijkertijd in het systeem gaan verloren. Hierbij nemen we aan dat aan het eind van ieder uur eerst mogelijke afrondingen van een produktie plaatsvinden en daarna pas mogelijke aankomsten.

   Laat (X_n, Y_n) de toestand van het produktieproces aan het begin van het $n-$de uur zijn. Hierbij stelt X_n het aantal orders in het systeem aan het begin van het n-de uur voor en $Y_n = +$ (respectievelijk $Y_n = -$) geeft aan dat de machine in werking (respectievelijk in reparatie) is gedurende het $n-$de uur. Het stochastische proces $\{(X_n, Y_n) : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte

$$S = \{(0,-),(0,+),(1,-),(1,+),(2,-),(2,+),(3,-),(3,+)\}$$

   en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{4}{40} & \frac{12}{40} & \frac{5}{40} & \frac{15}{40} & \frac{1}{40} & \frac{3}{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{40} & \frac{12}{40} & \frac{5}{40} & \frac{15}{40} & \frac{1}{40} & \frac{3}{40} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{40} & \frac{12}{40} & \frac{6}{40} & \frac{18}{40} \end{pmatrix}.$$

   a) Leg de kansen in de vierde rij van de overgangsmatrix uit.

b) Wat is het verwachte aantal keer dat de machine stuk gaat gedurende de eerste dag (= 24 uur), als aan het begin van het eerste uur de machine in werking is en er geen orders in het systeem zijn?

c) Wat is op de lange termijn het deel van de tijd dat de machine in werking, respectievelijk in reparatie is?

d) Wat is op de lange termijn de doorzet van het systeem (i.e., het verwachte aantal produkties dat gedurende een dag (= 24 uur) wordt afgerond)?

e) Wat zijn op de lange termijn de verwachte kosten per dag als het bedrijf iedere keer dat de machine stuk gaat 110 euro kosten heeft (deze kosten zijn onafhankelijk van de duur van de reparatietijd van de machine)?

2. In een bepaalde functie in een bedrijf kunnen werknemers zich in vier verschillende salarisschalen bevinden, genummerd 1, 2, 3 en 4. De ontwikkeling van de werknemers in deze functie binnen het bedrijf in opeenvolgende jaren kan beschreven worden met behulp van een discrete-tijd Markov keten met 5 toestanden en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{1}{10} & \frac{3}{70} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Hierbij corresponderen de toestanden 1, 2, 3 en 4 met de vier verschillende salarisschalen en toestand 5 correspondeert met de toestand waarbij de persoon het bedrijf verlaten heeft.

a) Wat is het verwachte totaal aantal jaren dat een werknemer, startend in salarisschaal 1, in het bedrijf zal doorbrengen?

b) Wat is de kans dat een werknemer, startend in salarisschaal 1, gedurende zijn/haar verblijf bij het bedrijf ooit salarisschaal 3 zal bereiken?

c) Wat is het verwachte aantal jaren dat een werknemer zich respectievelijk in de vier verschillende salarisschalen zal bevinden gedurende zijn/haar verblijf bij het bedrijf?

d) Het bedrijf start met 100 werknemers in salarisschaal 1, 90 werknemers in salarisschaal 2, 80 werknemers in salarisschaal 3 en 70 werknemers in salarisschaal 4. Verder trekt het bedrijf ieder jaar 20 nieuwe werknemers in salarisschaal 1 aan en 5 nieuwe werknemers in salarisschaal 2. Wat is op de lange termijn het verwachte aantal werknemers in de vier verschillende salarisschalen bij het bedrijf?

e) Hoeveel werknemers verlaten op de lange termijn gemiddeld per jaar het bedrijf?

Normering:

Alle tien de onderdelen (1a, …, 1e, 2a, …, 2e) wegen even zwaar mee.