Toets **Stochastische OR** (2DD27), dinsdag 27 september 2011, 10.45–12.45 uur.

Alle onderdelen (1a, 1b, 1c, 1d, 1e, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b) wegen even zwaar mee.

1. Een produktieproces van een bepaald type produkt bestaat uit 3 produktiestappen die op 3 verschillende machines uitgevoerd worden. De eerste twee produktiestappen worden respectievelijk op machine 1 en machine 2 gedaan. In deze twee produktiestappen vindt de produktie van de twee belangrijkste componenten van het produkt plaats. Deze twee produktiestappen kunnen parallel gedaan worden. Beide produktiestappen vergen een geometrisch verdeelde produktietijd met parameter 2/3. Hierbij is als tijdseenheid 1 minuut gekozen. De produktie van een component op machine 1 zal dus iedere minuut met kans 2/3 afgerond worden en met kans 1/3 in de volgende minuut nog voortgezet worden. Een zelfde bewering geldt voor de produktie van een component op machine 2. De produktietijden van de twee componenten op machine 1 en machine 2 zijn onafhankelijke stochastische variabelen.

   Nadat de produktie van beide componenten is afgerond, worden de componenten geassembleerd tot eindprodukt op machine 3. Dit deel van het produktieproces vergt een geometrisch verdeelde produktietijd met parameter 1/2. De assemblage van de twee componenten wordt dus iedere minuut met kans 1/2 afgerond en met kans 1/2 de volgende minuut nog voortgezet.

   a) Modelleer de produktie van *één enkel produkt* als een discrete-tijd Markov keten (DTMC). Geef toestandsruimte en overgangsmatrix van de DTMC.

   b) Wat is de kans dat de produktie van een produkt meer dan 4 minuten duurt?

   c) Wat is het verwachte aantal minuten dat de produktie van een produkt duurt?

   In werkelijkheid produceren de 3 machines natuurlijk continu produkten (in plaats van dat slechts één enkel produkt wordt geproduceerd op de machines). Echter, voor de derde machine is er geen buffer. Als gevolg daarvan kunnen de eerste twee machines alleen afgeronde componenten doorschuiven naar machine 3, als beide machines hun component hebben afgerond en machine 3 vrij is. Als dat niet zo is zullen machine 1 en/of machine 2 geblokkeerd raken als hun component is afgerond.

   Het doorschuiven van afgeronde componenten en produkten gebeurt synchroon, aan het eind van iedere minuut. Allereerst zal machine 3 een afgerond produkt doorschuiven (dit is altijd mogelijk aangezien machine 3 de laatste machine in het produktieproces is). Vervolgens zullen machines 1 en 2 hun afgeronde componenten naar machine 3 doorschuiven (dit kan alleen als machine 3 vrij is en *beide* machines 1 en 2 de produktie van hun component hebben afgerond). Ten slotte, als machine 1 en 2 beide vrij gekomen zijn, zal er met de produktie van nieuwe componenten op deze machines gestart worden.

   Laat $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, X_n^{(3)})$ de toestand van het produktieproces aan het begin van de $n-$de minuut zijn. Hierbij geeft $X_n^{(j)}$ de toestand van machine $j$ weer, $j = 1, 2, 3$. In het vervolg zeggen we dat $X_n^{(j)} = w$ als machine $j$ werkend aan een produkt is ($w$ = working), $X_n^{(j)} = b$ als machine $j$ geblokkeerd is ($b$ = blocked) en $X_n^{(j)} = i$ als machine $j$ vrij is ($i$ = idle). Het stochastische proces $\{X_n : n \geq 0\}$ is een discrete-tijd Markov keten met toestandsruimte

$$S = \{(w, w, w), (w, b, w), (w, b, i), (w, w, i), (b, w, w), (b, b, w), (b, w, i)\}$$

en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{2}{18} & \frac{2}{18} & \frac{1}{18} & \frac{2}{18} & \frac{4}{18} & \frac{2}{18} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{2}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

d) Leg de getallen in de tweede rij van de overgangsmatrix uit.

e) Bereken de lange-termijn doorzet van het produktieproces (i.e., het aantal produkten dat op de lange termijn per uur geproduceerd wordt).

2. Een bedrijf heeft een aantal machines in gebruik. Machines worden na iedere week dat ze werken gecontroleerd en indien nodig worden ze naar de revisie afdeling gestuurd. Na de controle aan het eind van de week wordt twintig procent van de machines naar de revisie afdeling gestuurd en de overige tachtig procent kan gewoon door blijven werken. Een revisie neemt maximaal twee weken in beslag. Echter, het is mogelijk dat de revisie al na een week succesvol is afgerond (dit is het geval bij veertig procent van de machines). Verder wordt bij twintig procent van de machines na één week revisie besloten dat verdere revisie geen zin meer heeft (deze machines kunnen in het vervolg nooit meer gebruikt worden). Alle machines die een tweede week van revisie nodig hebben werken na die tweede week weer.

   a) Modelleer de toestand van de machine als een discrete-tijd Markov keten.

   b) Een werkende machine produceert 1000 produkten per week. Hoeveel produkten worden gemiddeld op een machine geproduceerd voordat besloten wordt dat de machine nooit meer gebruikt kan worden?

   c) Hoeveel nieuwe machines moet het bedrijf iedere week aanschaffen wanneer het op de lange duur 100 werkende machines wil hebben?

3. Beschouw de reducibele Markov keten met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ en beginverdeling $a^{(0)} = (\alpha, 0, \beta, 0, 1 - \alpha - \beta)$ voor $\alpha \geq 0$ en $\beta \geq 0$ met $\alpha + \beta \leq 1$.

   De overgangsmatrix van de Markov keten wordt gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

   a) Bepaal de limietverdeling van de Markov keten.

   b) Neem aan $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Wat is de verwachte tijd dat de Markov keten in de transiente toestanden verblijft?