TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR, 16 januari 2007, 14.00-17.00 uur.

---

1. a)
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Deze kans is 1. Het is een reducibele Markov keten met maar 1 eindklasse.
Alternatieve redenering:
Oplossen van het stelsel
$$\begin{aligned} q_{A,E_1} &= \tfrac{1}{3}q_{A,E_1} + \tfrac{2}{3}q_{B,E_1}, \\ q_{B,E_1} &= \tfrac{1}{6}q_{A,E_1} + \tfrac{1}{6}q_{B,E_1} + \tfrac{2}{3}q_{C,E_1}, \\ q_{C,E_1} &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6}q_{A,E_1} + \tfrac{1}{6}q_{C,E_1} \end{aligned}$$
geeft
$$q_{A,E_1} = q_{B,E_1} = q_{C,E_1} = 1.$$

c) Definieer $\tilde{g}(i)$ als de totale verwachte testkosten bij start in toestand i. Dan geldt
$$\begin{aligned} \tilde{g}(A) &= 100 + \tfrac{1}{3}\tilde{g}(A) + \tfrac{2}{3}\tilde{g}(B), \\ \tilde{g}(B) &= 75 + \tfrac{1}{6}\tilde{g}(A) + \tfrac{1}{6}\tilde{g}(B) + \tfrac{2}{3}\tilde{g}(C), \\ \tilde{g}(C) &= 50 + \tfrac{1}{6}\tilde{g}(A) + \tfrac{1}{6}\tilde{g}(C). \end{aligned}$$
Oplossen van dit stelsel geeft
$$\tilde{g}(A) = 450, \quad \tilde{g}(B) = 300, \quad \tilde{g}(C) = 150.$$
Het gevraagde antwoord is dus $\tilde{g}(A) = 450$ euro.

d) Oplossen van het stelsel
$$\begin{aligned} s_1 &= 32 + \tfrac{1}{3}s_1 + \tfrac{1}{6}s_2 + \tfrac{1}{6}s_3, \\ s_2 &= \tfrac{2}{3}s_1 + \tfrac{1}{6}s_2, \\ s_3 &= \tfrac{2}{3}s_2 + \tfrac{1}{6}s_3. \end{aligned}$$
geeft
$$s_1 = 75, \quad s_2 = 60, \quad s_3 = 48.$$

e) Toestandsruimte: $S = \{A_1, A_2, B, C, \text{afgerond}\}$.
Overgangsmatrix:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Bij toestandsruimte $S = \{(0,-),(0,+),(1,+),(2,+),(3,+),(4,+),(5,+)\}$ en tijdseenheid uur wordt de intensiteitenmatrix gegeven door

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Instroom = Uitstroom per toestand

$$\begin{aligned} 2p(0,-) &= p(0,+) \\ 3p(0,+) &= 2p(0,-) + p(1,+) + p(2,+) + p(3,+) \\ 3p(1,+) &= 2p(0,+) + p(4,+) \\ 3p(2,+) &= 2p(1,+) + p(5,+) \\ 3p(3,+) &= 2p(2,+) \\ 3p(4,+) &= 2p(3,+) \\ p(5,+) &= 2p(4,+) \end{aligned}$$

+ normalisatievergelijking $p(0,-) + \sum_{n=0}^{5} p(n,+) = 1$.

c) $p(5,+) = 14.6\%$ van de orders.

d) $24 \cdot (1 - p(0,-)) = 21.31$ batches per dag.

e) Per dag worden er gemiddeld $24 \cdot 2 \cdot (1 - p(5,+)) = 40.99$ produkten geproduceerd in $24 \cdot (1 - p(0,-)) = 21.31$ batches. In een batch zitten dus gemiddeld $40.99/21.31 = 1.92$ produkten.

3. Dit is een $M/M/s/K$ systeem, met $s = 3, K = 5, \lambda = 12$ en $\mu = 6$ (tijdseenheid: uur).

a) Het aantal auto's voor een wasbeurt bij het benzinestation is een continue-tijd Markov keten met intensiteitenmatrix

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

De limietkansen worden gegeven door

$$p_0 = \tfrac{27}{211},\ p_1 = \tfrac{54}{211},\ p_2 = \tfrac{54}{211},\ p_3 = \tfrac{36}{211},\ p_4 = \tfrac{24}{211},\ p_5 = \tfrac{16}{211}.$$

b) De bezettingsgraad van een wasstraat wordt gegeven door

$$p_1 \cdot \tfrac{1}{3} + p_2 \cdot \tfrac{2}{3} + (p_3 + p_4 + p_5) \cdot 1 = \tfrac{130}{211} = 0.616.$$

Alternatieve redenering: De bezettingsgraad van een wasstraat wordt gegeven door

$$\frac{\lambda(1 - p_K)}{s\mu} = \frac{12(1 - p_5)}{18} = 0.616.$$

c) De gemiddelde doorlooptijd van een auto *die gewassen wordt* volgt met behulp van de formule van Little. Dit geeft

$$W_e = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{\sum_{n=0}^{5} np_n}{12(1-p_5)} = 0.19 \text{ uur } = 11.4 \text{ minuten} .$$

4. a) Voor de i-de levensduur van de machine geldt

$$L_i = \max\,(L_{i,1}, L_{i,2}),$$

waarbij $L_{i,1}$ de i-de levensduur van het ene onderdeel is en $L_{i,2}$ de i-de levensduur van het andere onderdeel. De stochastische variabelen $L_{i,1}$ en $L_{i,2}$ zijn beiden uniform verdeeld op het interval tussen 0 en 2 jaar. Er geldt dus

$$P(L_{i,1} \leq x) = P(L_{i,2} \leq x) = \tfrac{1}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Aangezien $L_{i,1}$ en $L_{i,2}$ bovendien onafhankelijk zijn geldt, voor $0 \leq x \leq 2$,

$$F_{L_i}(x) = P(L_i \leq x) = P(\,\max\,(L_{i,1}, L_{i,2}) \leq x) = P(L_{i,1} \leq x) \cdot P(L_{i,2} \leq x) = \tfrac{1}{4}x^2.$$

Voor de verwachte tijd tussen twee vervangingen geldt

$$E(T_1) = E(L_1) = \int_0^2 x \cdot f_{L_1}(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \tfrac{1}{2}x\,dx = \tfrac{4}{3} \text{ jaar} .$$

De lange-termijn gemiddelde vervangingskosten volgen nu uit de formule $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 1000$ euro en $E(T_1) = \frac{4}{3}$ jaar. Het antwoord is dus 750 euro per jaar.

b) Voor de verwachte tijd tussen twee vervangingen geldt

$$E(T_1) = E(\,\min\,(L_1, 1)) = \int_0^1 x \cdot \tfrac{1}{2}x\,dx + \int_1^2 1 \cdot \tfrac{1}{2}x\,dx = \tfrac{11}{12}.$$

Voor de verwachte kosten van een vervanging geldt

$$E(C_1) = P(L_1 \leq 1) \cdot 1000 + P(L_1 > 1) \cdot 500 = \tfrac{1}{4} \cdot 1000 + \tfrac{3}{4} \cdot 500 = 625.$$

De lange-termijn gemiddelde vervangingskosten per jaar worden nu $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 625$ euro en $E(T_1) = \frac{11}{12}$ jaar. Het antwoord is dus 681.82 euro per jaar.