TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Uitwerking Tentamen Stochastische OR (2YD18/2DD21), 11 januari 2008, 09.00-12.00 uur.

---

1. a) De kapotte machine werkt in de volgende week. Voor de werkende machines geldt:

$$\begin{aligned} P(\text{ 3 stuk }) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}, \\ P(\text{ 2 stuk }) &= 3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{8}, \\ P(\text{ 1 stuk }) &= 3\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{8}, \\ P(\text{ 0 stuk }) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{8}. \end{aligned}$$

Dus

$$p_{3,0} = 0, \quad p_{3,1} = \tfrac{1}{8}, \quad p_{3,2} = \tfrac{3}{8}, \quad p_{3,3} = \tfrac{3}{8}, \quad p_{3,4} = \tfrac{1}{8}.$$

b) Definiëer m_i als het verwachte aantal weken tot je voor het eerst in toestand 4 zit bij start in toestand i. Dan geldt

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \tfrac{1}{2}m_3, \\ m_2 &= 1 + \tfrac{1}{4}m_2 + \tfrac{1}{2}m_3, \\ m_3 &= 1 + \tfrac{1}{8}m_1 + \tfrac{3}{8}m_2 + \tfrac{3}{8}m_3. \end{aligned}$$

Er volgt $m_3 = \frac{26}{5}$, $m_2 = \frac{24}{5}$ en $m_1 = \frac{18}{5}$. Het gevraagde aantal weken is dus $m_1 = \frac{18}{5}$.

c) Voor de limietverdeling geldt:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \tfrac{1}{16}\pi_4, \\ \pi_1 &= \tfrac{1}{8}\pi_3 + \tfrac{4}{16}\pi_4, \\ \pi_2 &= \tfrac{1}{4}\pi_2 + \tfrac{3}{8}\pi_3 + \tfrac{6}{16}\pi_4, \\ \pi_3 &= \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{2}\pi_2 + \tfrac{3}{8}\pi_3 + \tfrac{4}{16}\pi_4, \\ \pi_4 &= \pi_0 + \tfrac{1}{2}\pi_1 + \tfrac{1}{4}\pi_2 + \tfrac{1}{8}\pi_3 + \tfrac{1}{16}\pi_4. \end{aligned}$$

Bovendien moet natuurlijk gelden $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$.

d) werken: $\frac{0}{4}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{2}{4}\pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 + \frac{4}{4}\pi_4 = \frac{54}{81} = \frac{2}{3}$.
niet werken: $\frac{4}{4}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1 + \frac{2}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{0}{4}\pi_4 = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$.

e) $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \frac{49}{81}$.

f)
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

2. a) Toestandsruimte $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. De intensiteitenmatrix is (tijdseenheid: uur)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \end{pmatrix}$$

met bijbehorend intensiteitendiagram. De snedevergelijkingen zijn:

$$\begin{aligned} 12p_0 &= 12p_1, \\ 12p_1 &= 12p_2, \\ 12p_2 &= 24p_3, \\ 12p_3 &= 24p_4. \end{aligned}$$

De normeringsvergelijking is $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. De limietverdeling wordt gegeven door

$$p_0 = \tfrac{4}{15}, \quad p_1 = \tfrac{4}{15}, \quad p_2 = \tfrac{4}{15}, \quad p_3 = \tfrac{2}{15}, \quad p_4 = \tfrac{1}{15}.$$

b) $p_4 = \frac{1}{15}$

c) De formule van Little geeft $W_e = L/\lambda_e$. Hierbij is $L = \sum_{i=0}^{4} ip_i = \frac{22}{15}$ en $\lambda_e = \lambda(1-p_4) = \frac{168}{15}$. We vinden dus $W_e = \frac{22}{168}$ uur $= 7.86$ minuten .

d) De tijd dat er onafgebroken 2 kassa's open zijn is de first passage time van toestand 3 naar toestand 2. Definiëer m_i als het verwachte aantal uren tot je voor het eerst in toestand 2 zit bij start in toestand i. Dan geldt

$$\begin{aligned} m_3 &= \tfrac{1}{36} + \tfrac{12}{36} m_4, \\ m_4 &= \tfrac{1}{24} + m_3. \end{aligned}$$

Er volgt $m_3 = \frac{1}{16}$ uur $= 3.75$ minuten .

3. a) Het aantal werkende machines in het werkstation is een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{3, 2, 1, 0\}$ en intensiteitenmatrix (tijdseenheid: dag)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze continue-tijd Markov keten heeft als limietverdeling

$$p_3 = \tfrac{2}{12}, \quad p_2 = \tfrac{3}{12}, \quad p_1 = \tfrac{6}{12}, \quad p_0 = \tfrac{1}{12}.$$

De opbrengstvector wordt gegeven door

$$c_3 = 3000, \quad c_2 = 2000, \quad c_1 = 1000, \quad c_0 = 0.$$

De lange-termijn gemiddelde opbrengst volgt dan uit de formule

$$g = \sum_{i=0}^{3} p_i \cdot c_i = 1500 \text{ euro} .$$

Alternatief: Gebruik de formule $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 9000$ euro en $E(T_1) = 1 + \frac{3}{2} + 3 + \frac{1}{2} = 6$ dagen .

b) Het aantal werkende machines in het werkstation is nu een continue-tijd Markov keten met toestandsruimte $S = \{3, 2, 1\}$ en intensiteitenmatrix (tijdseenheid: dag)

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze continue-tijd Markov keten heeft als limietverdeling

$$p_3 = \tfrac{2}{6}, \quad p_2 = \tfrac{3}{6}, \quad p_1 = \tfrac{1}{6}.$$

De opbrenstvector wordt gegeven door

$$c_3 = 3000, \quad c_2 = 2000, \quad c_1 = 0.$$

De lange-termijn gemiddelde opbrengst volgt dan uit de formule

$$g = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot c_i = 2000 \text{ euro} .$$

Alternatief: Gebruik de formule $\lim_{t\to\infty} C(t)/t = E(C_1)/E(T_1)$ met $E(C_1) = 3000 \cdot 1 + 2000 \cdot \frac{3}{2} = 6000$ euro en $E(T_1) = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 3$ dagen .

4. a) De toestandsruimte wordt gegeven door

$$S = \{(k_1, k_2, k_3) : k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_3 \geq 0, k_1 + k_2 + k_3 = 5\}.$$

De relatieve bezoekfrequenties zijn voor alle 3 de werkstations gelijk ($v_1 = v_2 = v_3$). De relatieve grootheden $v_1/\mu_1, v_2/\mu_2$ en v_3/μ_3 kunnen dus gekozen worden als $v_1/\mu_1 = 2, v_2/\mu_2 = 1$ en $v_3/\mu_3 = 2$. De limietkansen $p(k_1, k_2, k_3)$ zijn dus gelijk aan $C \cdot 2^{k_1} 1^{k_2} 2^{k_3} = C \cdot 2^{k_1+k_3}$.

b) Het gemiddeld aantal bewerkingen, δ_i, dat per uur in station S_i gedaan wordt, is gelijk aan

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 30 \cdot (1 - p_1(0)) = 24.11, \\ \delta_2 &= 60 \cdot (1 - p_2(0)) = 24.14, \\ \delta_3 &= 30 \cdot (1 - p_3(0)) = 24.11. \end{aligned}$$

c) Met behulp van de formule van Little volgt

$$W_3 = \frac{L_3}{\delta_3} = \frac{2.187}{24.11} = 0.091 \text{ uur } = 5.44 \text{ minuten} .$$

d) De doorzet van het produktiesysteem wordt gegeven door $\delta_{tot} = 4/5 \cdot \delta_3 = 19.29$ jobs per uur. Met behulp van de formule van Little volgt dan

$$W_{tot} = \frac{L_{tot}}{\delta_{tot}} = \frac{5}{19.29} = 0.259 \text{ uur } = 15.55 \text{ minuten} .$$